

Raccordement de développements asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes

Sébastien Tordeux et Patrick Joly

Groupe de travail : Applications des Mathématiques, Rennes, décembre 2004

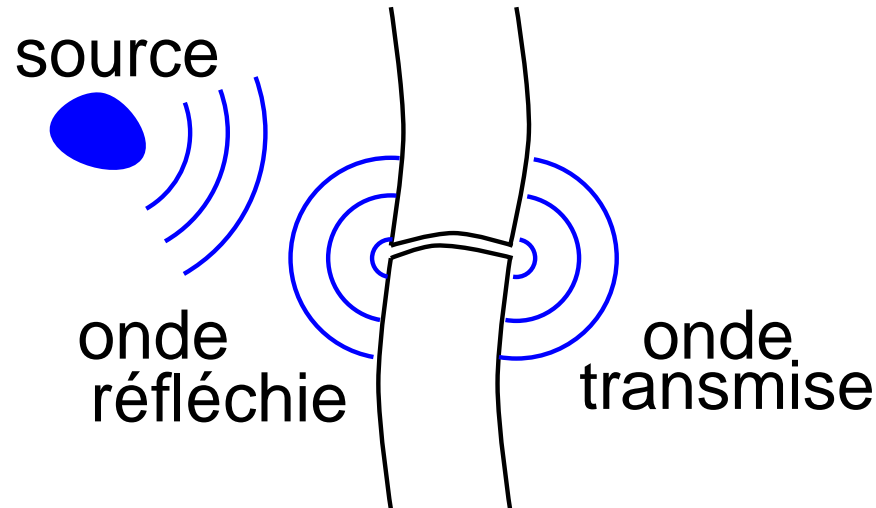
Projet POems

INRIA-Rocquencourt

ENSTA

Une application typique

Comment peut-on étudier la diffraction des ondes dans les milieux incluant des **fentes minces** ?

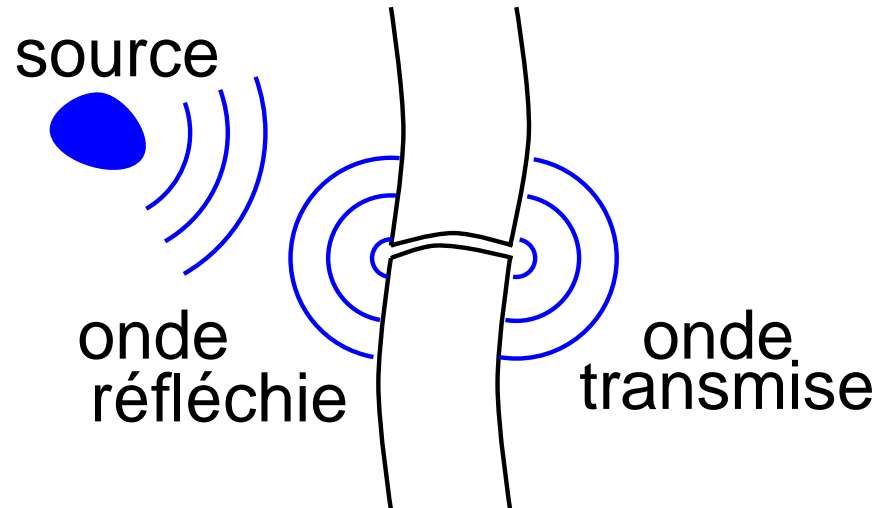


Un problème physique avec deux longueurs **caractéristiques**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La } \textbf{longueur d'onde} \lambda \\ \text{La } \textbf{largeur} \text{ de la fente } \varepsilon \end{array} \right.$$

Une application typique

Comment peut-on étudier la diffraction des ondes dans les milieux incluant des **fentes minces** ?

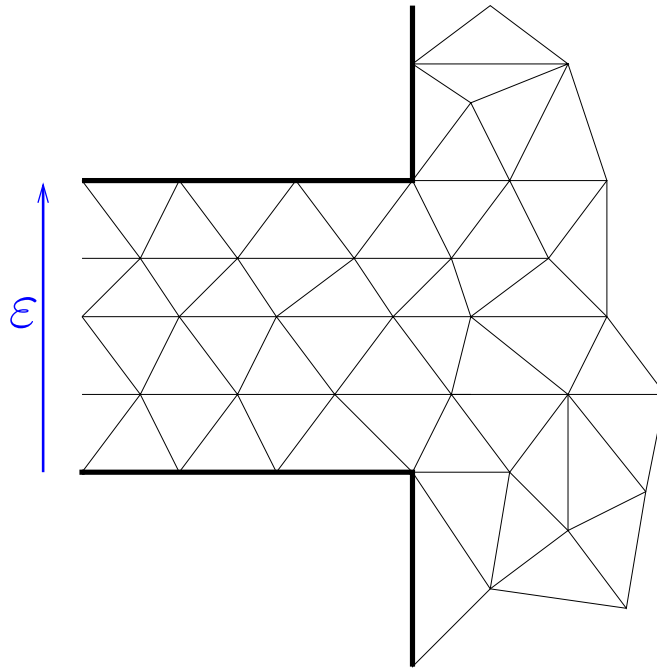


Une situation **asymptotique**:

$$\varepsilon \ll \lambda$$

La difficulté numérique

Un pas de maillage plus petit que ε



Ceci amène à des calculs coûteux

Quelques références

- Fentes minces:
Harrington, Auckland (1980), Tatout (1996).
- Différences finies:
Taflove (1995).
- Théorie des plaques, théorie des jonctions,...
Ciarlet, Le Dret, Dauge-Costabel.
- Développements asymptotiques raccordés:
McIver, Rawlins (1993), Il'in (1992).
- Techniques multi-échelles
Maz'ya, Nazarov, Plamenevskii (1991)
Oleinik, Shamaev, Yosifian (1992)

Un problème simple

Equation des ondes **scalaires** :

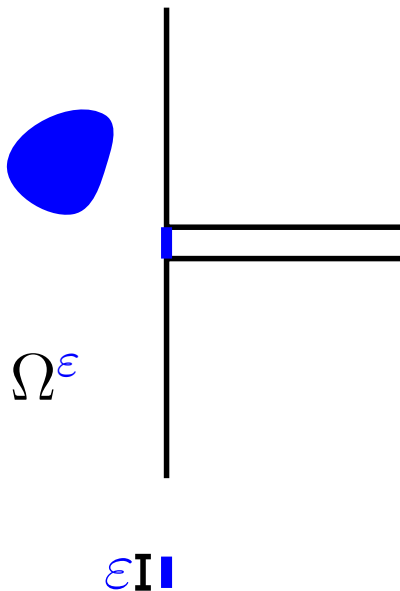
$$\frac{\partial^2 p^\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta p^\varepsilon = f$$

Régime **harmonique**:

$$p^\varepsilon(x, y, t) = \exp(-i\omega t) u^\varepsilon(x, y)$$

Equation de **Helmholtz** :

$$\Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = -f \quad \text{in } \Omega^\varepsilon$$



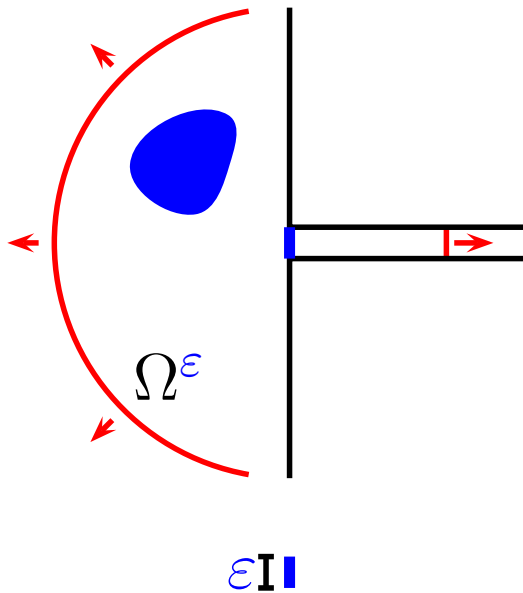
Un problème simple

Solution **sortante** à l'infini:

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} - i\omega u^\varepsilon \leq \frac{C}{r^2}, \quad \text{pour } r \text{ grand,}$$

Condition aux limites de **Neumann**
(mur rigide)

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon$$



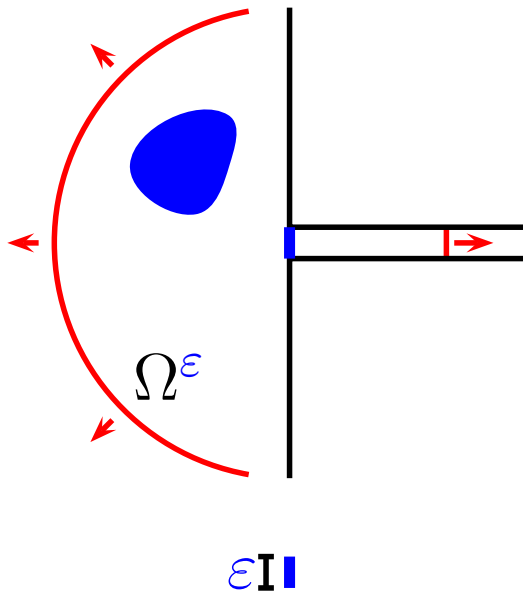
Un problème simple

Solution **sortante** à l'infini:

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} - i\omega u^\varepsilon \leq \frac{C}{r^2}, \quad \text{pour } r \text{ grand,}$$

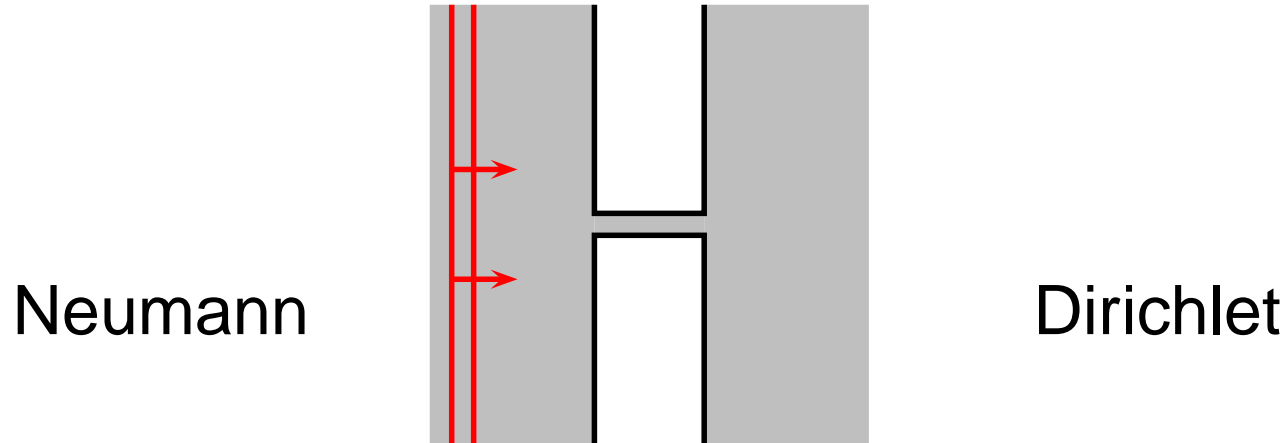
Condition aux limites de **Neumann**
(mur rigide)

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega^\varepsilon$$



Avec la condition aux limites de Dirichlet, la transmission dans la fente est **négligeable** ($o(\varepsilon^\infty)$).

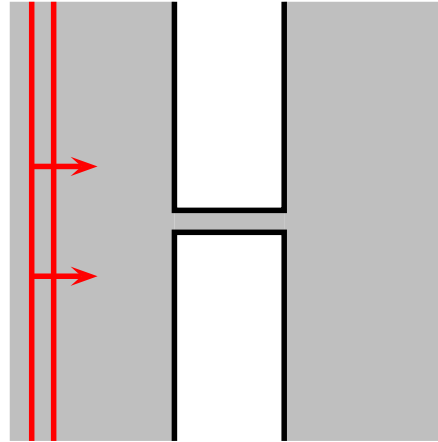
Une simulation numérique



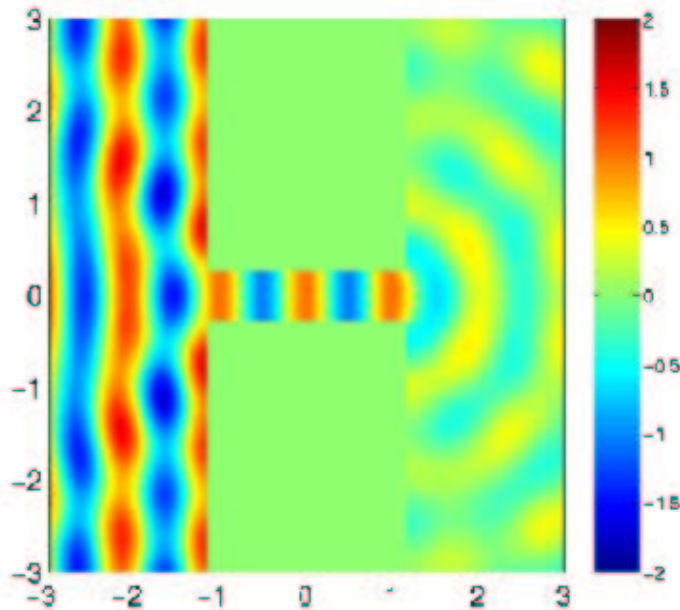
Simulation numérique effectuée avec le code éléments finis
d'ordre élevé (M. Duruflé, INRIA)

Une simulation numérique

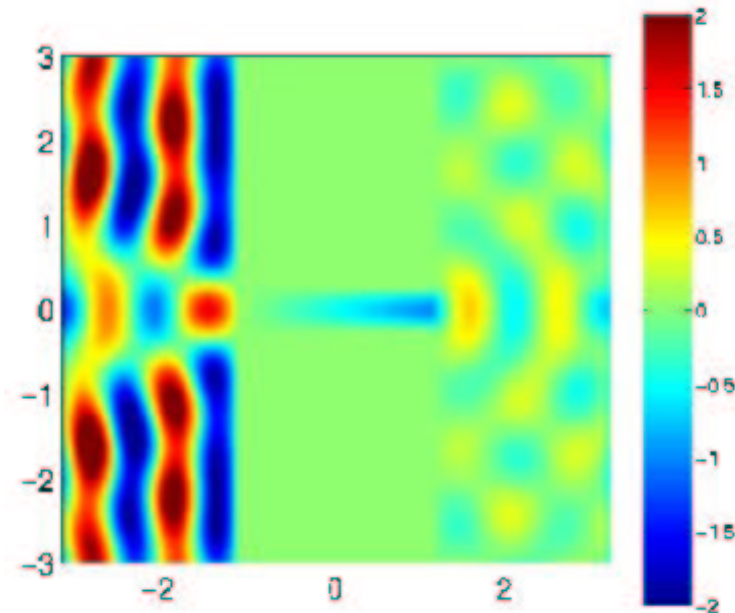
Neumann



Dirichlet

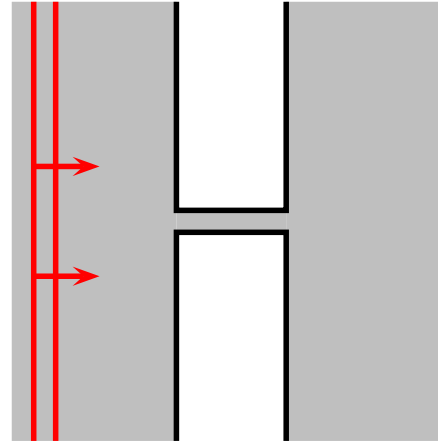


$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = 0.5$$

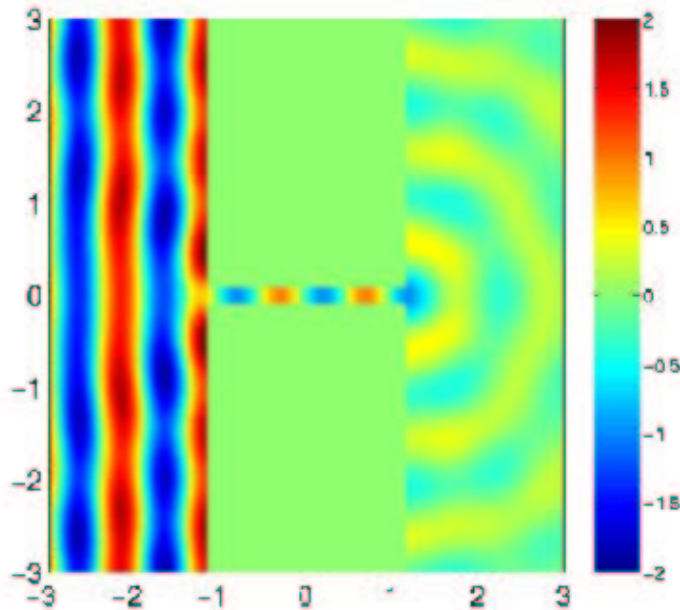


Une simulation numérique

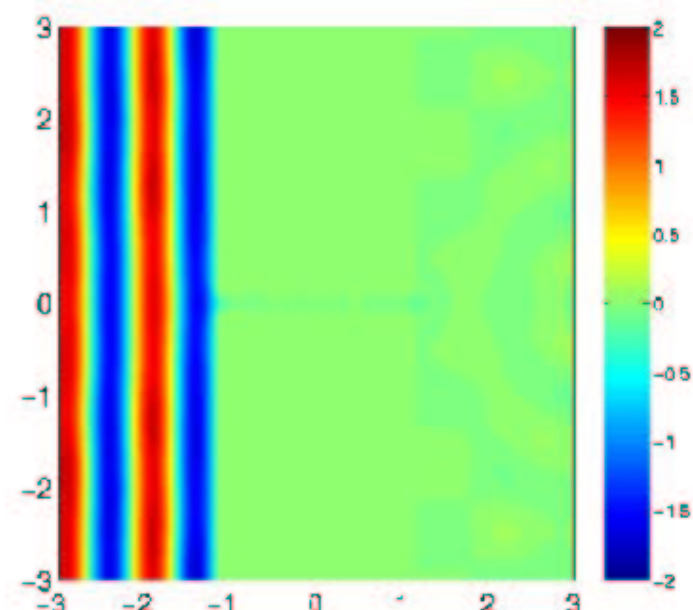
Neumann



Dirichlet

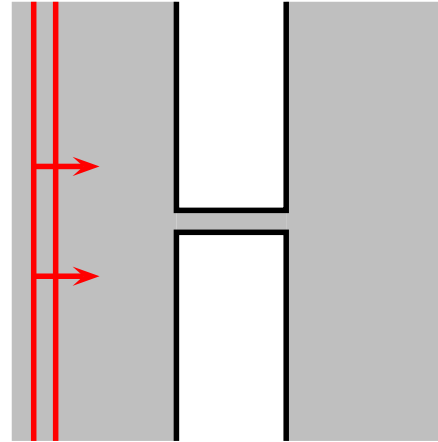


$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = 0.2$$

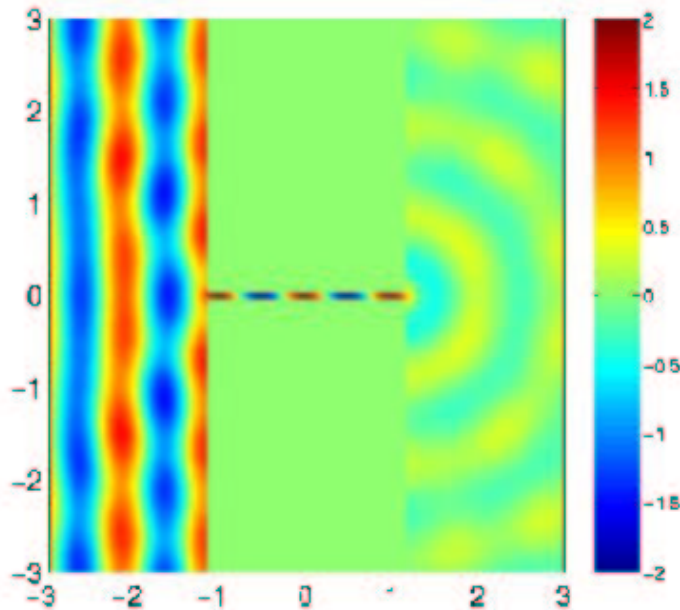


Une simulation numérique

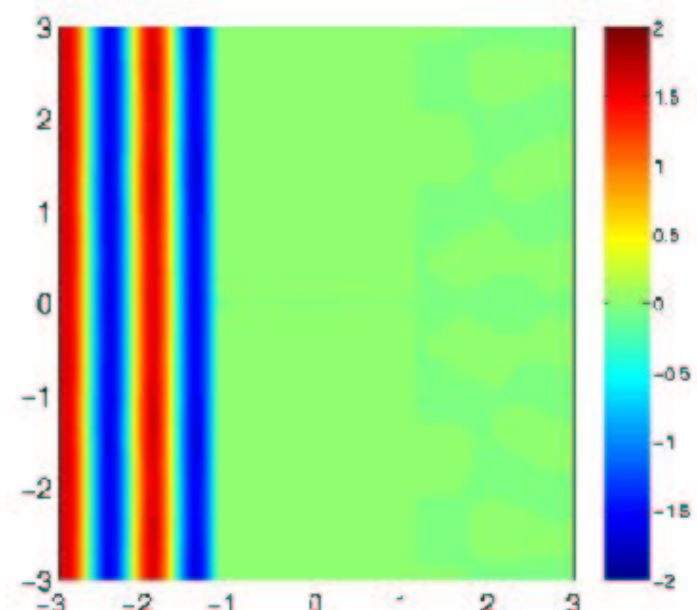
Neumann



Dirichlet



$$\frac{\varepsilon}{\lambda} = 0.1$$

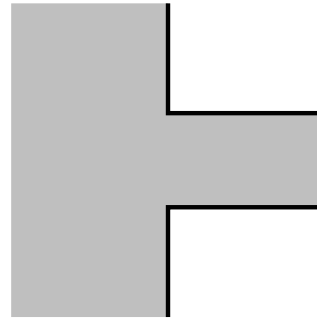


Objectifs

- Développer des méthodes de calcul **précises**

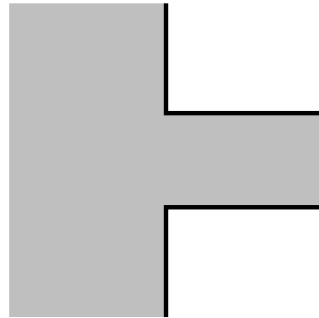
Objectifs

- Développer des méthodes de calcul **précises**
- Introduction d'une **zone de transition**



Objectifs

- Développer des méthodes de calcul **précises**
- Introduction d'une **zone de transition**



- Une technique appropriée: les **développements asymptotiques raccordés**
- Définir de **nouveaux modèles approchés** permettant de calculer la solution.
- Maîtriser l'utilisation de techniques “universelles” de calcul numérique (raffinement de maillage).

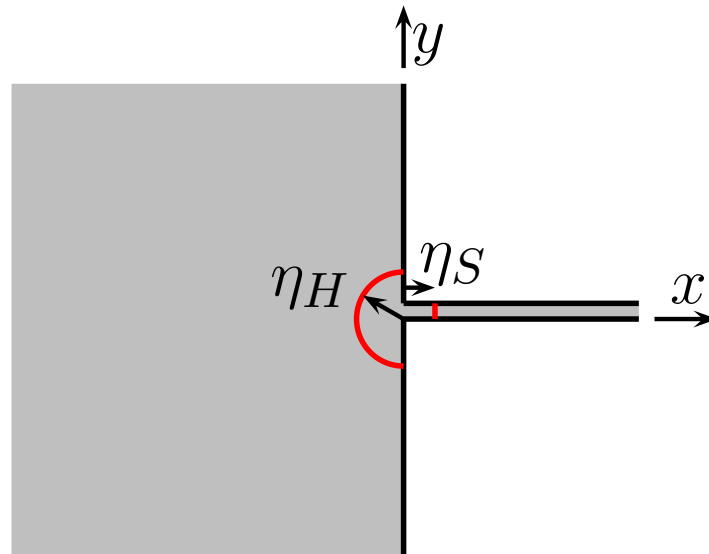
Apports aux rac. de dév. asympt.

- Reformuler les principes de raccord (pas toujours clairs) proposés par l'école anglo-saxonne.

Apports aux rac. de dév. asympt.

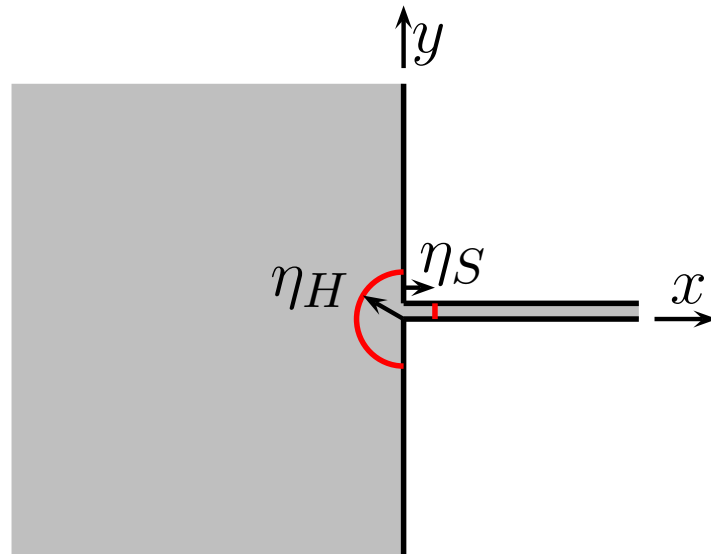
- Reformuler les **principes de raccord** (pas toujours clairs) proposés par l'école anglo-saxonne.
- Justification mathématique de cette technique.
 - Méthode **inspirée** des techniques multi-échelles
 - **Existence et unicité** des termes des développements asymptotiques.
 - Technique plus spécifique: **estimations d'erreur**.

Trois zones



- Champ lointain (champ 2D)
- Champ proche (couche limite)
- Champ de fente (champ 1D)

Trois zones

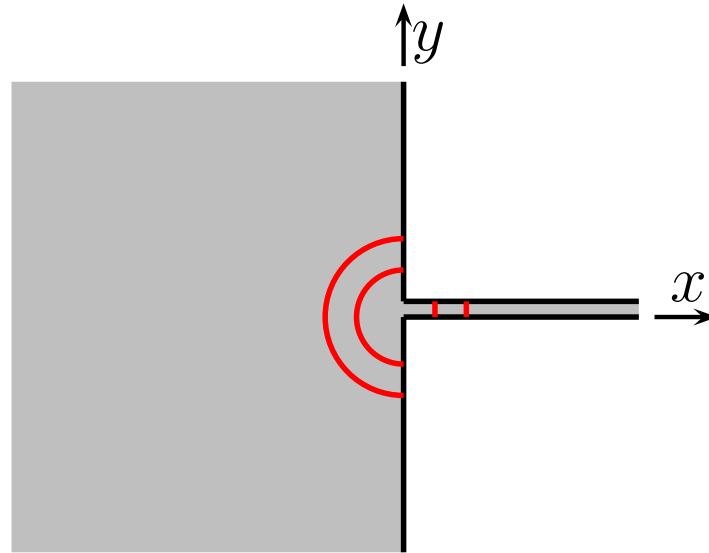


Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow +\infty$$

Trois zones

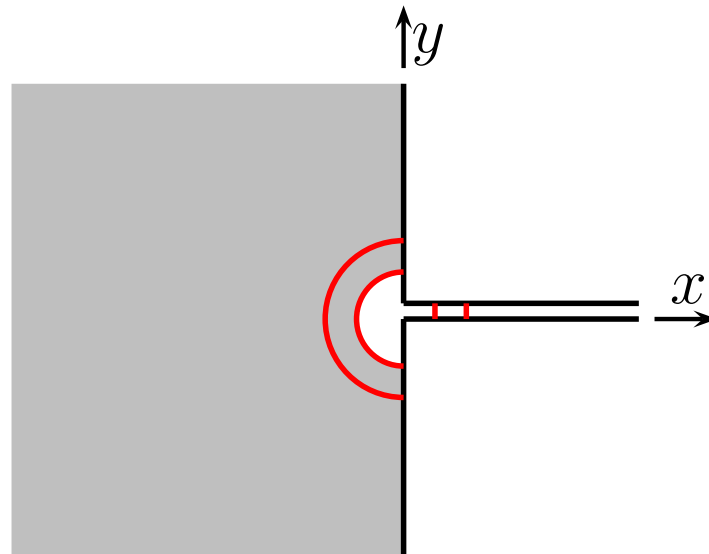


Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow +\infty$$

Trois zones



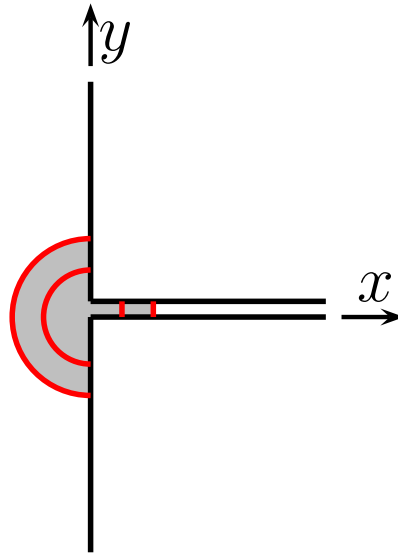
Champ lointain

Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow +\infty$$

Trois zones



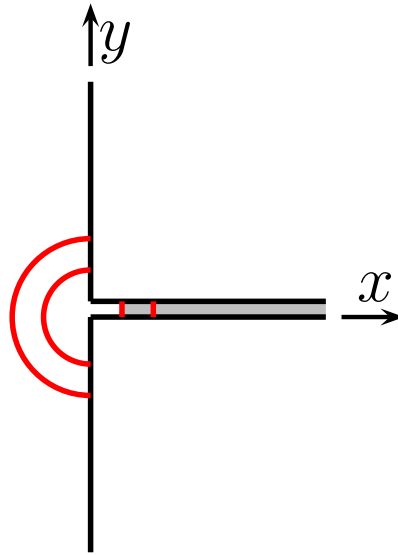
Champ proche

Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow +\infty$$

Trois zones



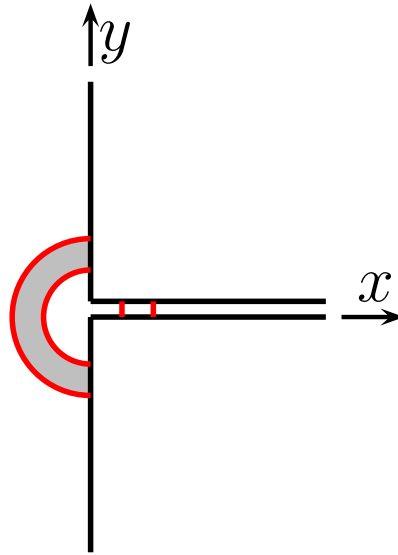
Champ de fente

Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow +\infty$$

Trois zones



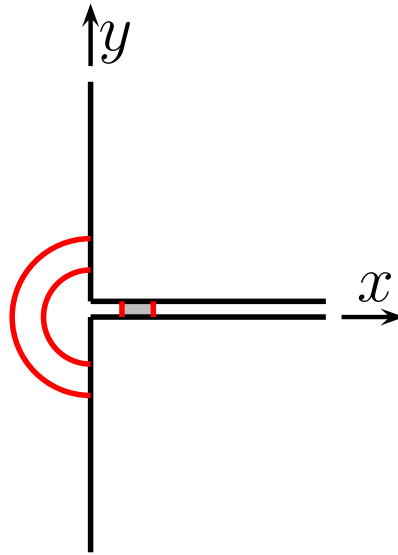
lointain et proche

Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow +\infty$$

Trois zones



de fente et proche

Les hypothèses asymptotiques:

$$\varepsilon \ll \eta_H(\varepsilon) \ll \lambda, \quad \varepsilon \ll \eta_S(\varepsilon) \ll \lambda.$$

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \eta(\varepsilon)/\varepsilon \rightarrow +\infty$$

Les temps de la méthode

- **Dérivation** des développements asymptotiques:
 - Partie **formelle**
 - Plusieurs présentations possibles

Les temps de la méthode

- **Dérivation** des développements asymptotiques:
 - Partie **formelle**
 - Plusieurs présentations possibles
- **Description** des développements asymptotiques
 - Partie **rigoureuse**
 - **Définition** des termes de développements asymptotiques

Les temps de la méthode

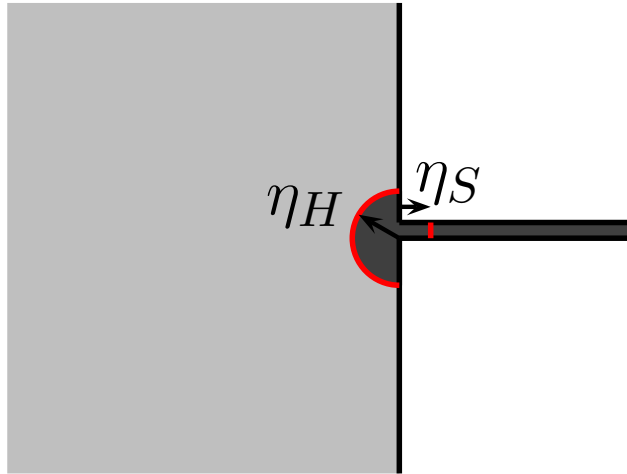
- **Dérivation** des développements asymptotiques:
 - Partie **formelle**
 - Plusieurs présentations possibles
- **Description** des développements asymptotiques
 - Partie **rigoureuse**
 - **Définition** des termes de développements asymptotiques
- **Validation mathématique** du développement asymptotique
 - Partie **rigoureuse**
 - **Estimations d'erreur**

Les temps de la méthode

- 2 **Dérivation** des développements asymptotiques:
 - Partie **formelle**
 - Plusieurs présentations possibles
- 1 **Description** des développements asymptotiques
 - Partie **rigoureuse**
 - **Définition** des termes de développements asymptotiques
- 3 **Validation mathématique** du développement asymptotique
 - Partie **rigoureuse**
 - **Estimations d'erreur**

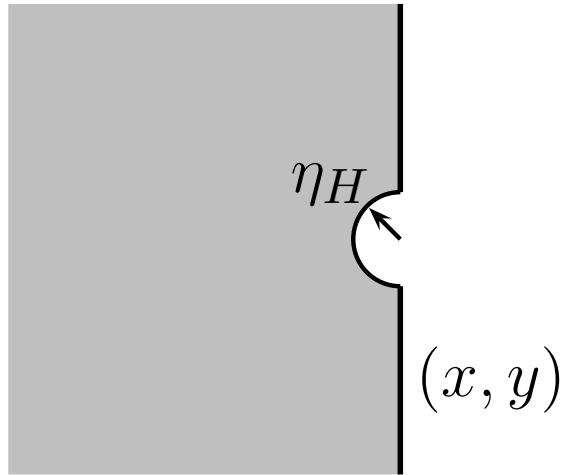
Champ lointain

Contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda$.



Champ lointain

Contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda$.

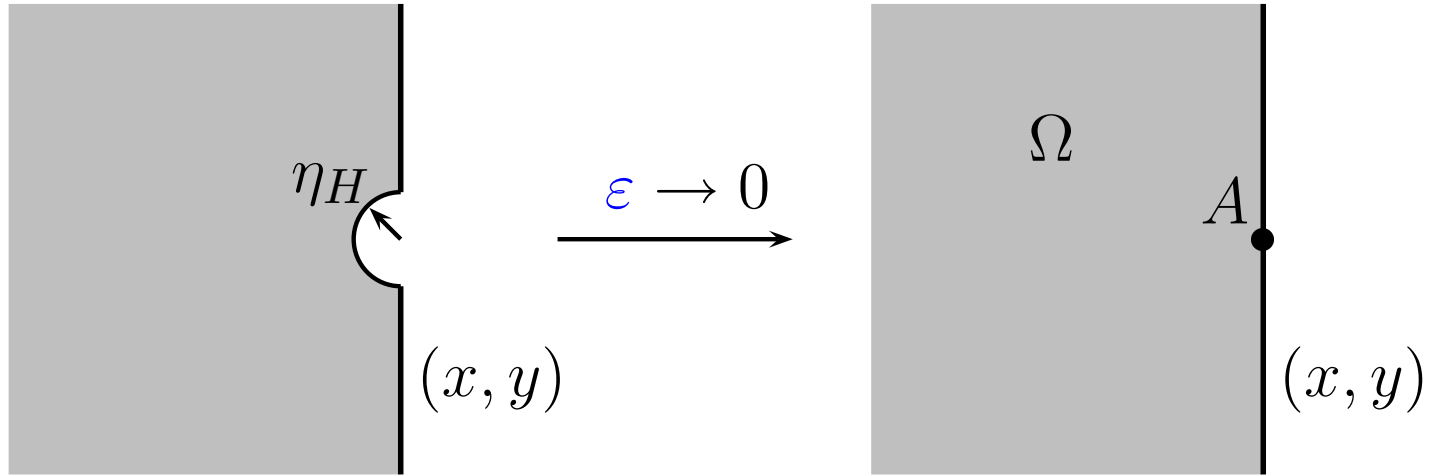


Pas de **normalisation**:

$$X = x, \quad Y = y.$$

Champ lointain

Contexte asymptotique: $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda$.



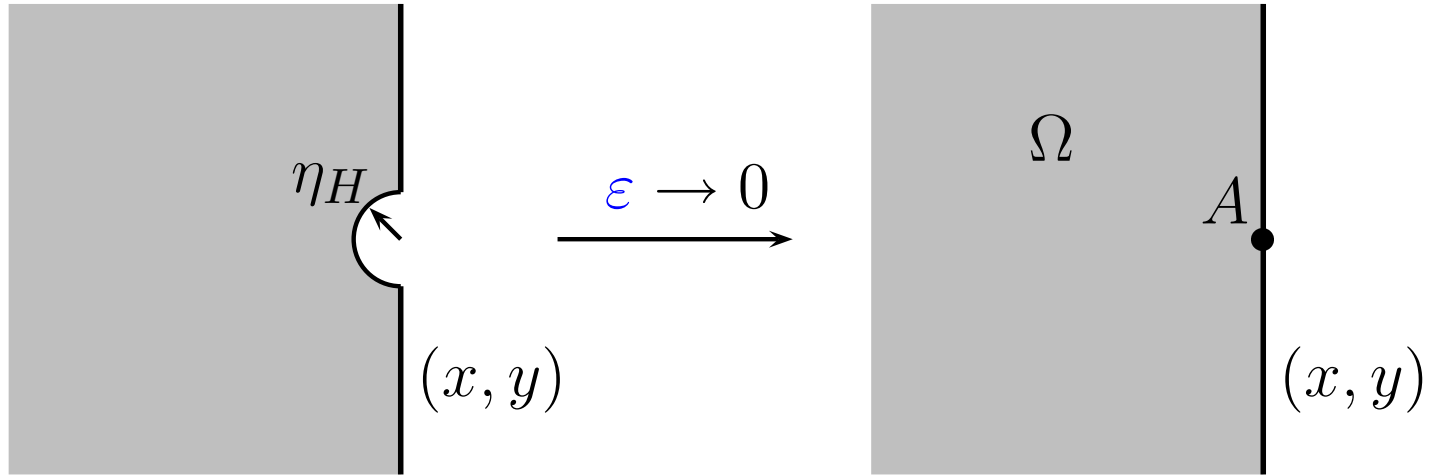
Pas de **normalisation**:

$$X = x, \quad Y = y.$$

Champ lointain

Contexte asymptotique:

$$\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda.$$

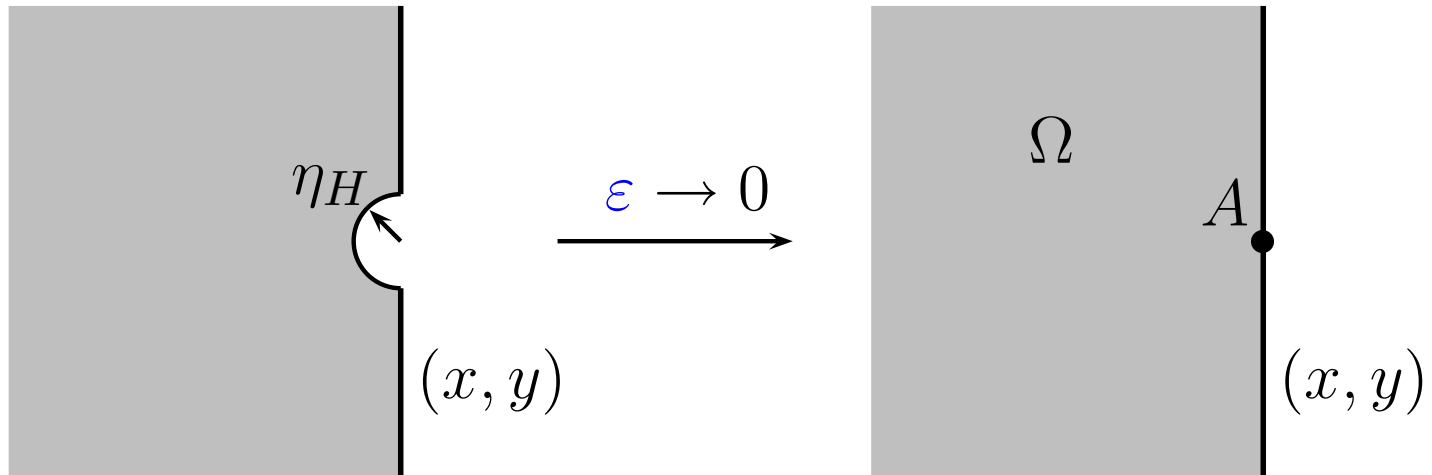


$$u^\varepsilon = u^0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k + o(\varepsilon^\infty), \quad \text{dans } \Omega.$$

Champ lointain

Contexte asymptotique:

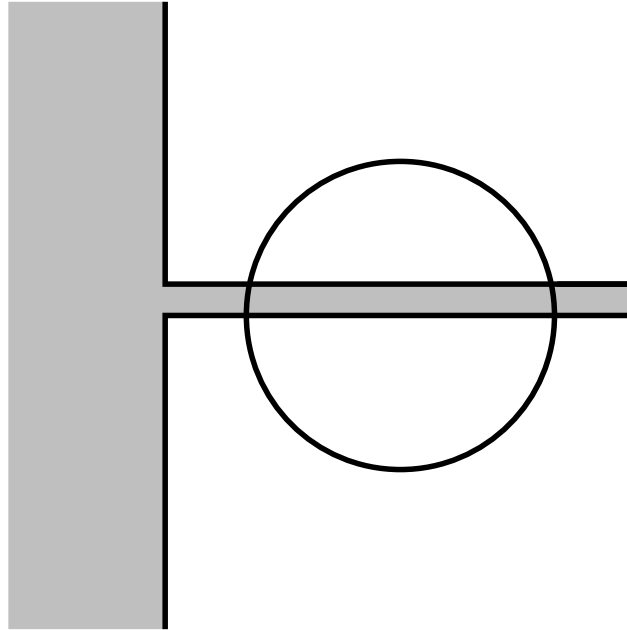
$$\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda.$$



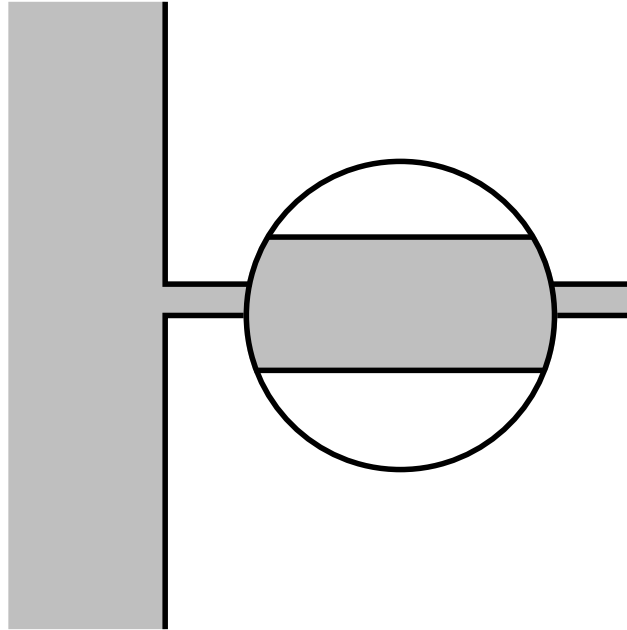
où les u_i^k vérifient l'équation de **Helmholtz homogène**

$$\Delta u_i^k + \omega^2 u_i^k = 0.$$

Champ de fente

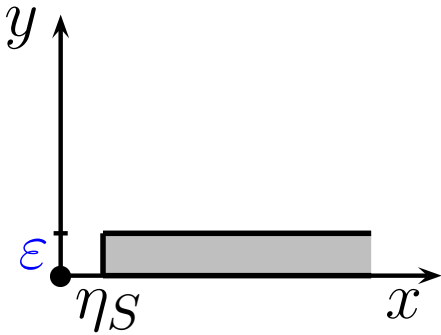


Champ de fente



$$u^\varepsilon(x, y) = U^\varepsilon\left(x, \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

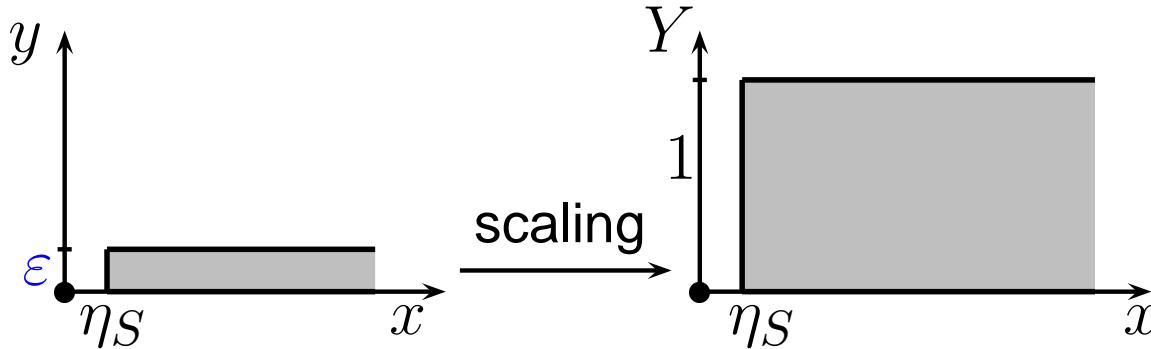
Champ de fente



Le contexte **asymptotique**: $\varepsilon \ll \eta_S \ll \lambda$.

La **normalisation**: $X = x, \quad Y = \frac{y}{\varepsilon}$

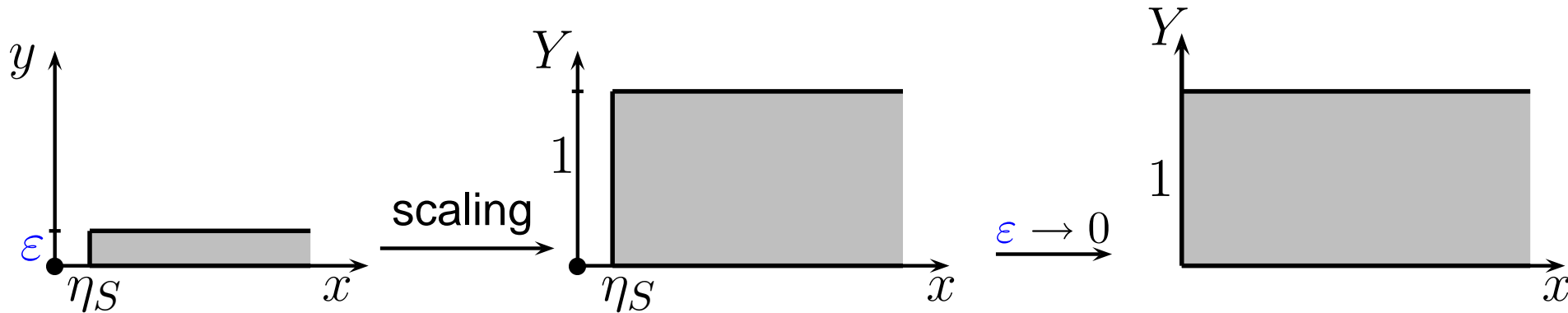
Champ de fente



Le contexte **asymptotique**: $\varepsilon \ll \eta_S \ll \lambda$.

La **normalisation**: $X = x, \quad Y = \frac{y}{\varepsilon}$

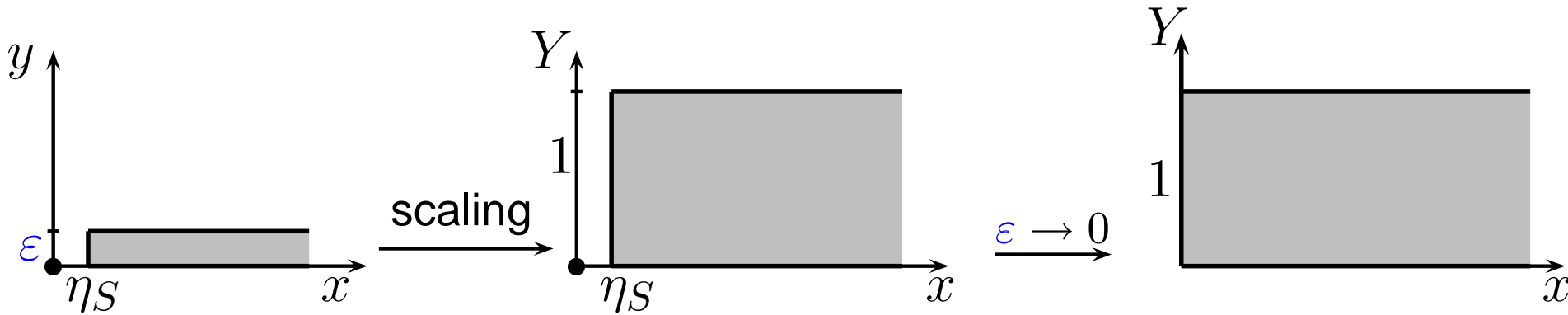
Champ de fente



Le contexte **asymptotique**: $\varepsilon \ll \eta_S \ll \lambda$.

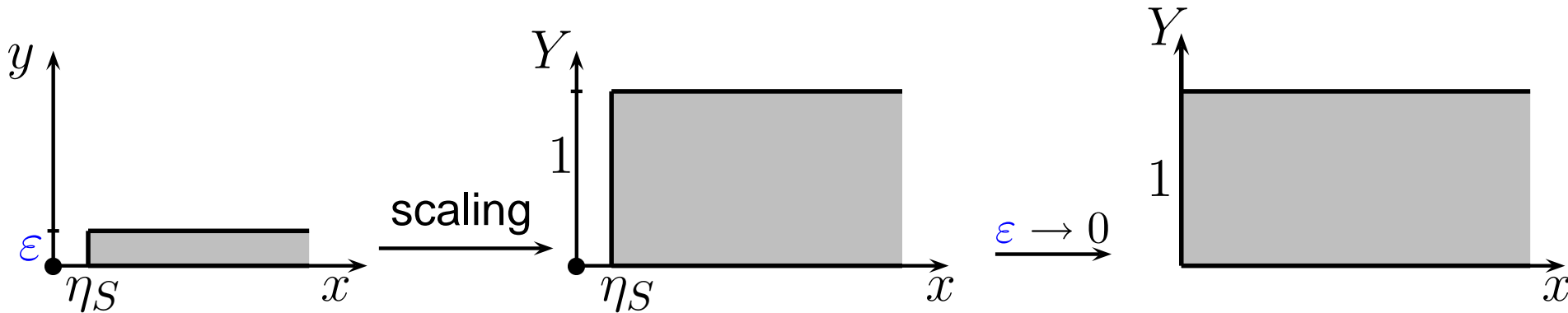
La **normalisation**: $X = x, \quad Y = \frac{y}{\varepsilon}$

Champ de fente



$$u^\varepsilon(x, Y\varepsilon) = U^\varepsilon(x, Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k U_i^k(x, Y) + o(\varepsilon^\infty),$$

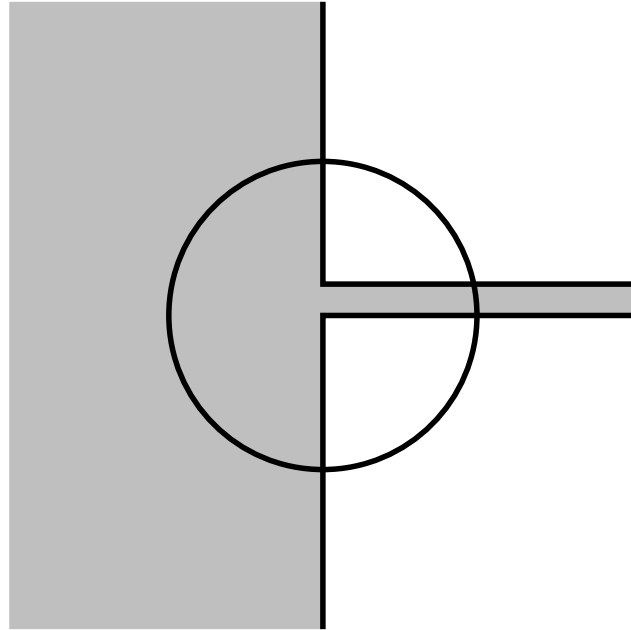
Champ de fente



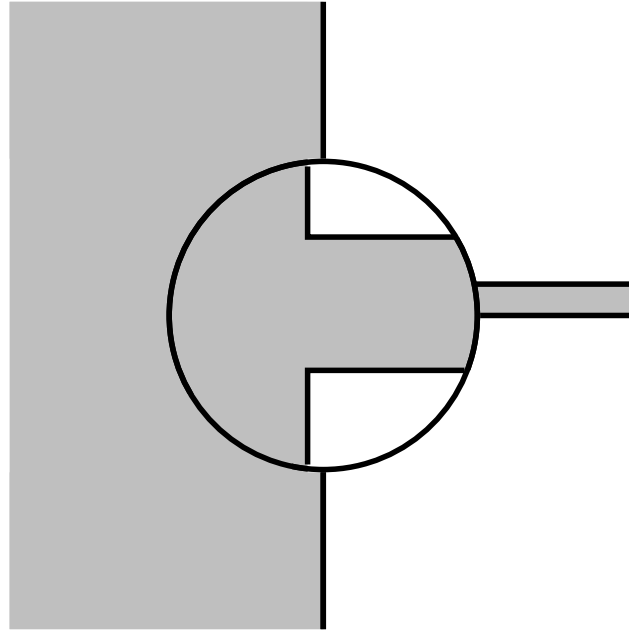
où les U_i^k vérifient l'équation de **Helmholtz 1D**:

$$\frac{d^2 U_i^k}{dx^2} + \omega^2 U_i^k = 0$$

Champ proche

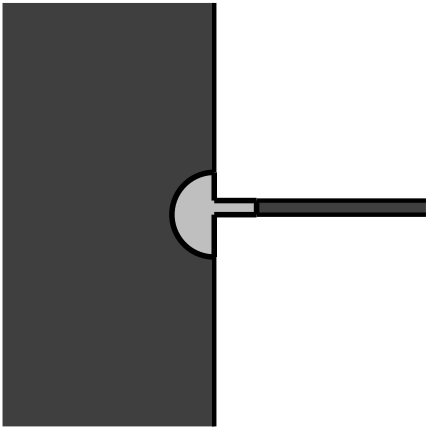


Champ proche



$$u^\varepsilon(x, y) = u_p^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)$$

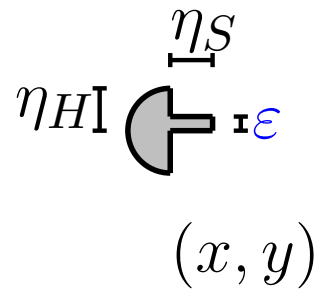
Champ proche



Contexte **asymptotique**: $\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda$, $\varepsilon \ll \eta_S \ll \lambda$.

La **normalisation**: $X = \frac{x}{\varepsilon}$, $Y = \frac{y}{\varepsilon}$

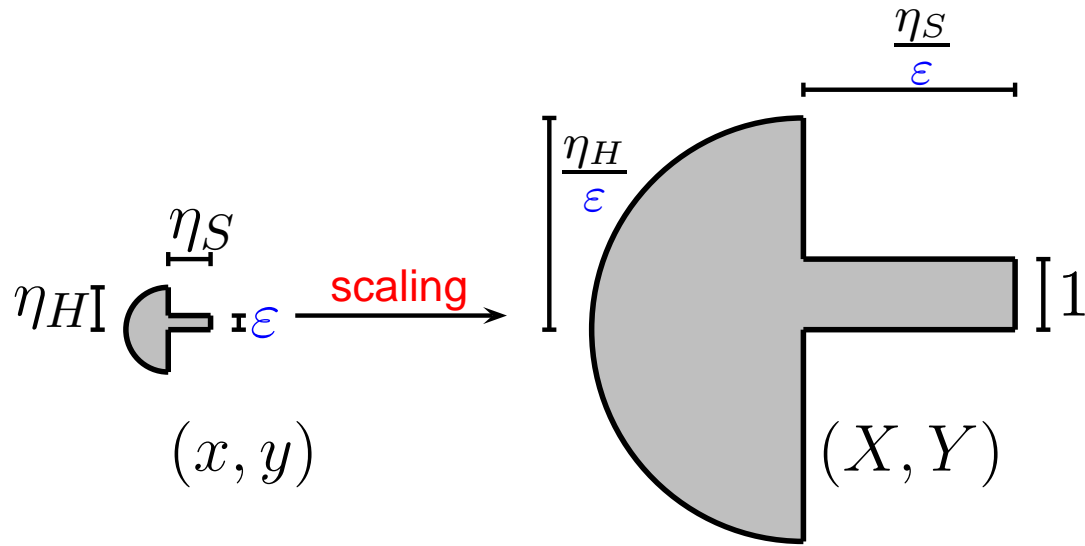
Champ proche



Contexte **asymptotique**: $\epsilon \ll \eta_H \ll \lambda, \quad \epsilon \ll \eta_S \ll \lambda.$

La **normalisation**: $X = \frac{x}{\epsilon}, \quad Y = \frac{y}{\epsilon}$

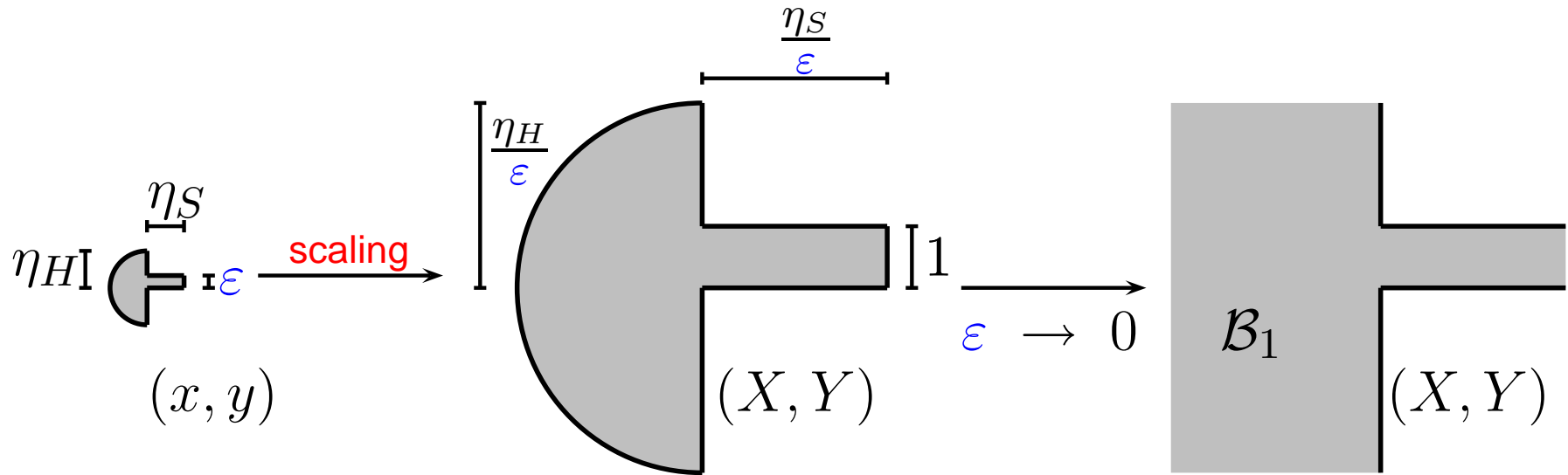
Champ proche



Contexte **asymptotique**: $\epsilon \ll \eta_H \ll \lambda, \quad \epsilon \ll \eta_S \ll \lambda.$

La **normalisation**: $X = \frac{x}{\epsilon}, \quad Y = \frac{y}{\epsilon}$

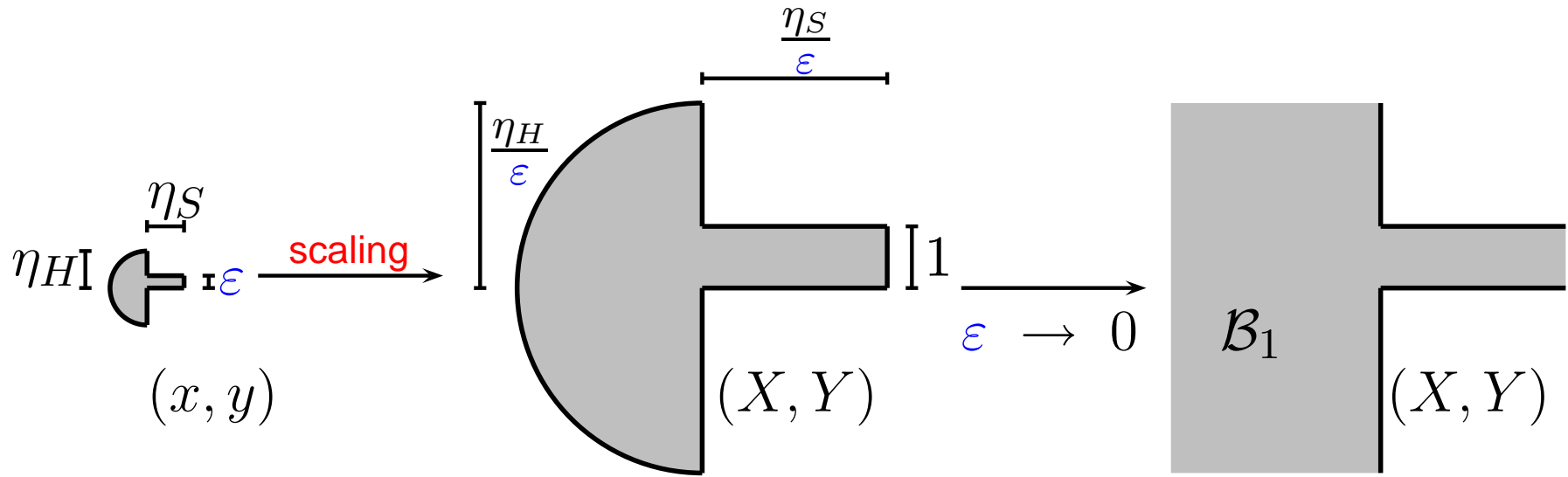
Champ proche



Contexte **asymptotique**: $\epsilon \ll \eta_H \ll \lambda, \quad \epsilon \ll \eta_S \ll \lambda.$

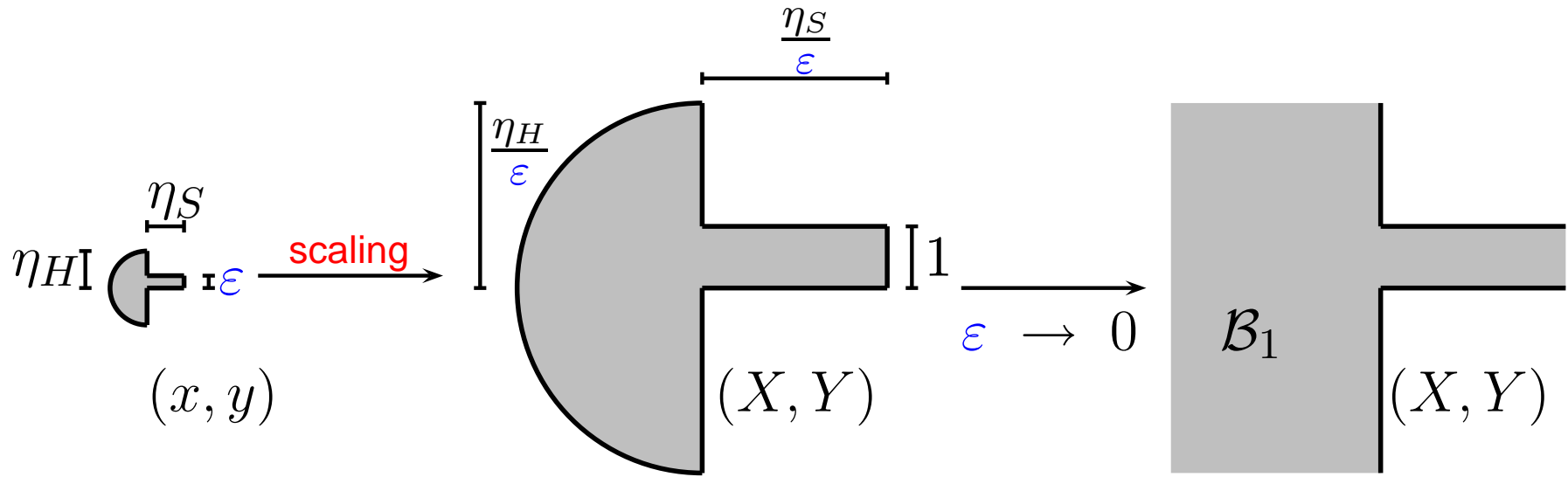
La **normalisation**: $X = \frac{x}{\epsilon}, \quad Y = \frac{y}{\epsilon}$

Champ proche



$$u^\epsilon(\epsilon X, \epsilon Y) = u_p^\epsilon(X, Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^i \epsilon^i (\log \epsilon)^k (u_p)_i^k(X, Y) + o(\epsilon^\infty)$$

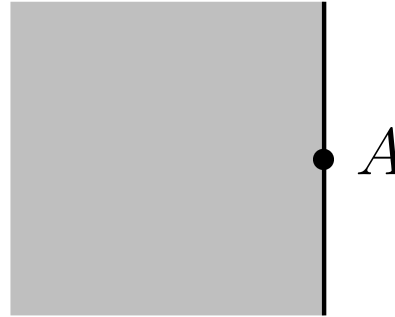
Champ proche



où les $(u_p)_i^k$ vérifient l'équation de **Laplace (in)homogène**.

$$\begin{cases} \Delta(u_p)_i^k = 0, & \text{si } i = k \text{ ou } k + 1, \\ \Delta(u_p)_i^k = -\omega^2 (u_p)_{i-2}^k, & \text{sinon.} \end{cases}$$

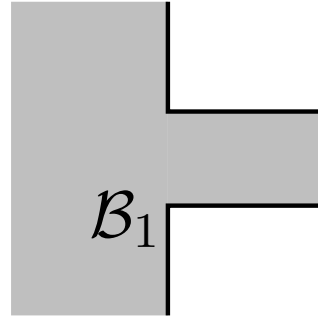
Ordre 0 : \underline{u}^0 , $(u_p)_0^0$, U_0^0



Champ lointain:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Chercher } u^0 \in H_{loc}^1(\Omega) \text{ tel que :} & \\ -\Delta u^0 - \omega^2 u^0 = f, & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u^0}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ u^0 \text{ est sortante.} & \end{array} \right.$$

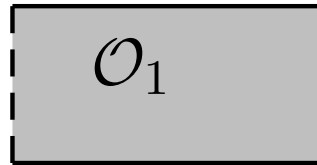
Ordre 0 : u^0 , $\underline{(u_p)_0^0}$, U_0^0



Champ proche:

$$(u_p)_0^0(X, Y) = u^0(A), \quad \text{dans } \mathcal{B}_1.$$

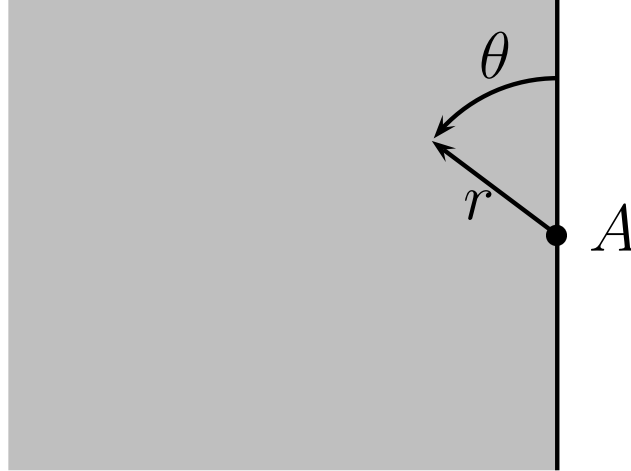
Ordre 0 : u^0 , $(u_p)_0^0$, U_0^0



Champ de fente:

$$U_0^0(x, Y) = u^0(A) \exp(i\omega x), \quad \text{dans } \mathcal{O}_1.$$

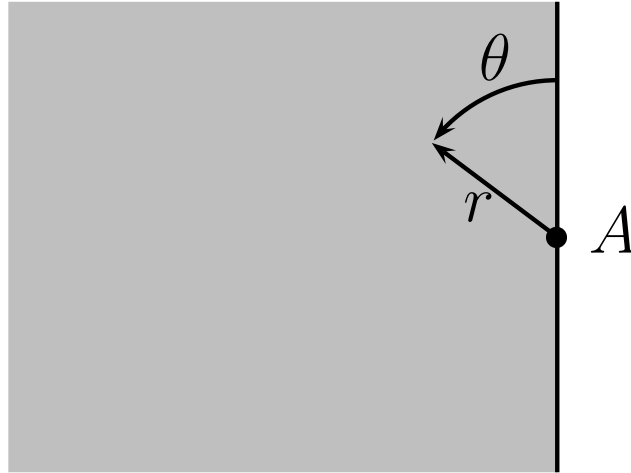
Ordre 1 : $\underline{u}_1^0, (u_p)_1^0, (u_p)_1^1, U_1^0, U_1^1$



Approximation de la solution exacte :

$$u^\varepsilon \simeq u^0 + \varepsilon u_1^0$$

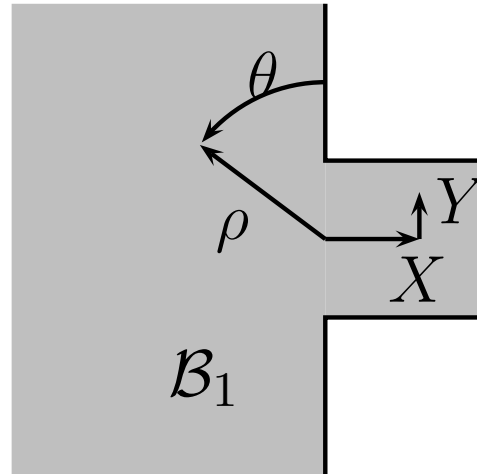
Ordre 1 : \underline{u}_1^0 , $(u_p)_1^0$, $(u_p)_1^1$, U_1^0 , U_1^1



Forme explicite de u_1^0

$$u_1^0(r, \theta) = -\frac{\omega}{2} u^0(A) H_0^{(1)}(\omega r).$$

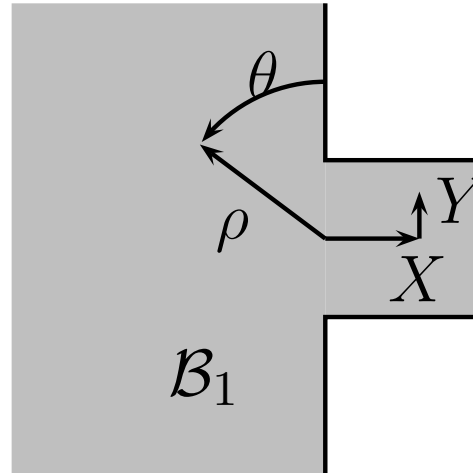
Ordre 1 : u_1^0 , $\underline{(u_p)_1^0}$, $\underline{(u_p)_1^1}$, U_1^0 , U_1^1



Approximation de la solution exacte :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(\varepsilon X, \varepsilon Y) = u_p^\varepsilon(X, Y), \\ u_p^\varepsilon \simeq (u_p)_0^0 + \varepsilon (u_p)_1^0 + \varepsilon \log \varepsilon (u_p)_1^1. \end{cases}$$

Ordre 1 : $u_1^0, \underline{(u_p)_1^0}, (u_p)_1^1, U_1^0, U_1^1$

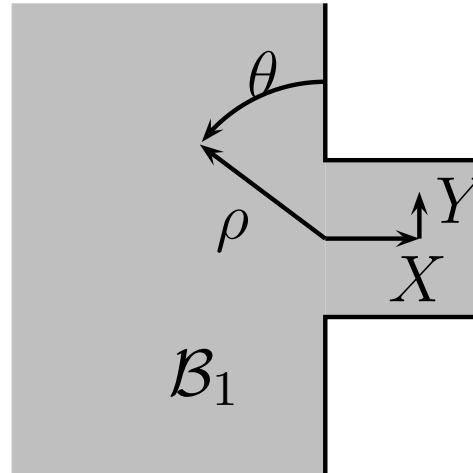


Champ proche :

Chercher $(u_p)_1^0 \in H_{loc}^1(\mathcal{B}_1)$ tel que:

$$\begin{cases} \Delta(u_p)_1^0 = 0, & \text{dans } \mathcal{B}_1 \\ \frac{\partial(u_p)_1^0}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\mathcal{B}_1. \end{cases}$$

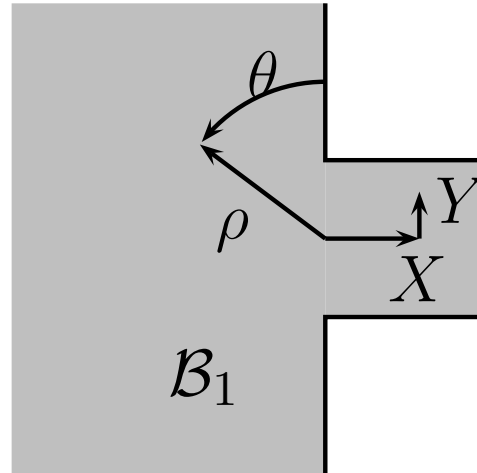
Ordre 1 : $u_1^0, \underline{(u_p)_1^0}, (u_p)_1^1, U_1^0, U_1^1$



Le comportement à l'infini dans le demi-espace:

$$(u_p)_1^0(\rho, \theta) - \frac{\partial u^0}{\partial y}(A) \rho \cos \theta + \frac{\omega}{2} u^0(A) \left[1 + \frac{2i}{\pi} (\log \rho + \gamma) \right] = O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Ordre 1 : $u_1^0, \underline{(u_p)_1^0}, (u_p)_1^1, U_1^0, U_1^1$



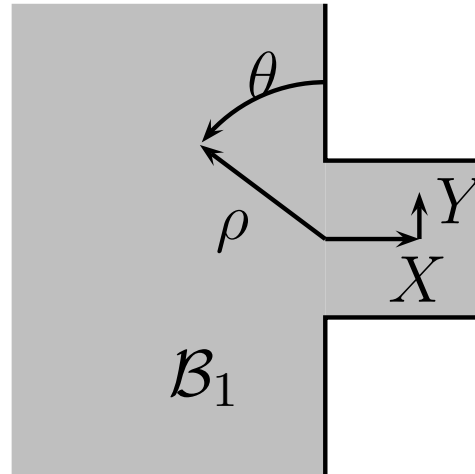
Le comportement à l'infini dans le demi-espace:

$$(u_p)_1^0(\rho, \theta) - \frac{\partial u^0}{\partial y}(A) \rho \cos \theta + \frac{\omega}{2} u^0(A) \left[1 + \frac{2i}{\pi} (\log \rho + \gamma) \right] = O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Le comportement à l'infini dans la fente:

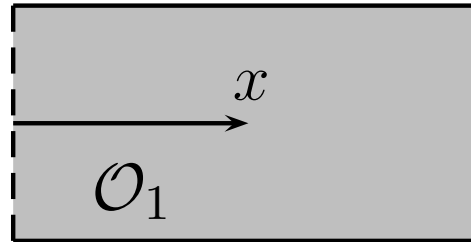
$$(u_p)_1^0(X, Y) - i \omega u^0(A) X = O(1).$$

Ordre 1 : u_1^0 , $(u_p)_1^0$, $\underline{(u_p)_1^1}$, U_1^0 , U_1^1



$$(u_p)_1^1 = -\frac{i\omega}{\pi} u^0(A)$$

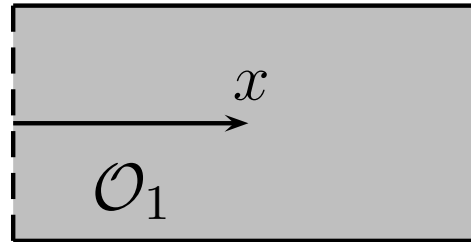
Ordre 1 : $u_1^0, (u_p)_1^0, (u_p)_1^1, \underline{U_1^0}, \underline{U_1^1}$



Approximation de la solution exacte :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x, \varepsilon Y) = U^\varepsilon(x, Y), \\ U^\varepsilon \simeq U_0^0 + \varepsilon U_1^0 + \varepsilon \log \varepsilon U_1^1. \end{cases}$$

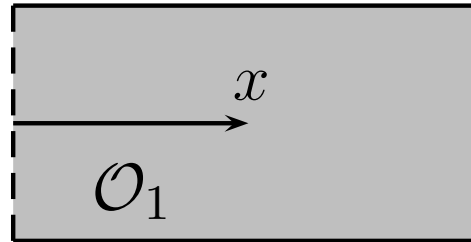
Ordre 1 : $u_1^0, (u_p)_1^0, (u_p)_1^1, \underline{U}_1^0, U_1^1$



Le champ de fente:

$$U_1^0(x) = \int_0^1 \mathcal{U}_1^0(0, Y) dY \exp(i\omega x),$$

Ordre 1 : u_1^0 , $(u_p)_1^0$, $(u_p)_1^1$, U_1^0 , U_1^1

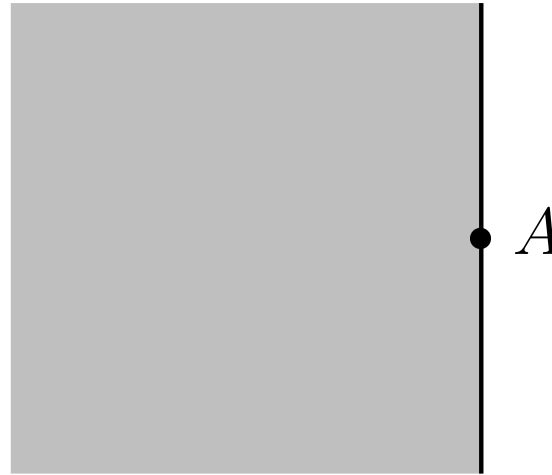


Le champ de fente:

$$U_1^1(x) = -\frac{i\omega}{\pi} u^0(A) \exp(i\omega x).$$

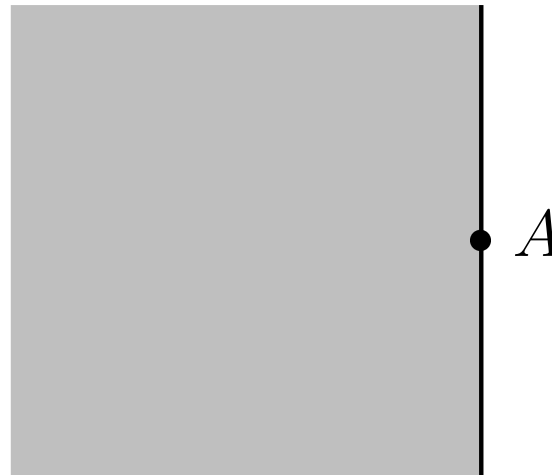
Les champs lointains d'ordre $i > 1$

- Les champs u_i^k sont définis dans tout le **demi-espace**:



Les champs lointains d'ordre $i > 1$

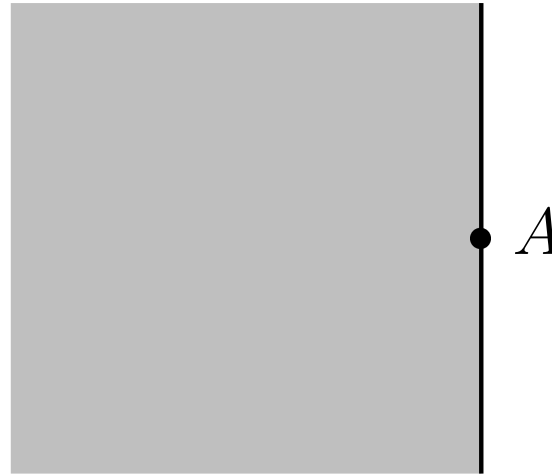
- Les champs u_i^k sont définis dans tout le **demi-espace**:



- Les champs lointains u_i^k
 - vérifient l'équation de **Helmholtz homogène**
 - sont **singuliers** au voisinage de l'origine
 - sont sortants à l'infini

Les champs lointains d'ordre $i > 1$

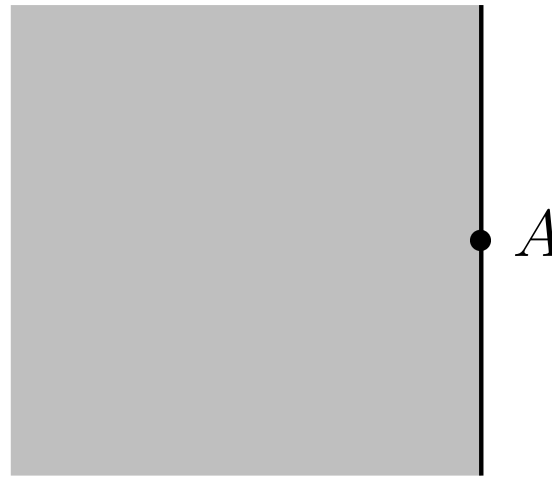
- Les champs u_i^k sont définis dans tout le **demi-espace**:



- $$u_i^k = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p H_p^{(1)}(\omega r) \cos p\theta$$

Les champs lointains d'ordre $i > 1$

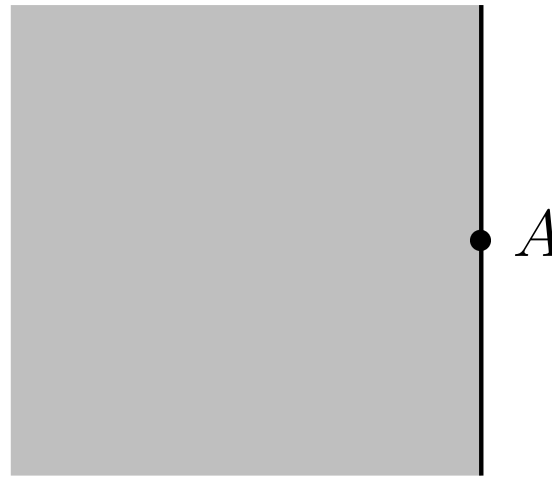
- Les champs u_i^k sont définis dans tout le **demi-espace**:



- $$u_i^k = \sum_{p=0}^{i-k-1} a_p H_p^{(1)}(\omega r) \cos p\theta$$

Les champs lointains d'ordre $i > 1$

- Les champs u_i^k sont définis dans tout le **demi-espace**:



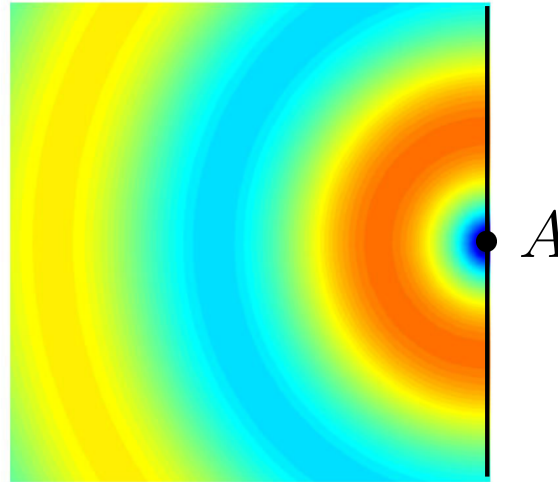
- $$u_i^k = \sum_{p=0}^{i-k-1} a_p H_p^{(1)}(\omega r) \cos p\theta$$

Les a_p sont fonctions des termes d'**ordre inférieur**

Les champs lointains d'ordre $i > 1$

- Les champs u_i^k sont définis dans tout le **demi-espace**:

$$\text{Im}(H_0^{(1)}(\omega r))$$



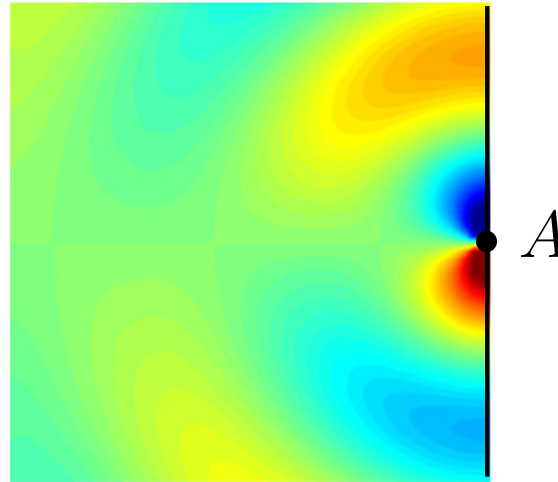
- $$u_i^k = \sum_{p=0}^{i-k-1} a_p H_p^{(1)}(\omega r) \cos p\theta$$

Les a_p sont fonctions des termes d'**ordre inférieur**

Les champs lointains d'ordre $i > 1$

- Les champs u_i^k sont définis dans tout le **demi-espace**:

$$\text{Im}(H_1^{(1)}(\omega r) \cos \theta)$$

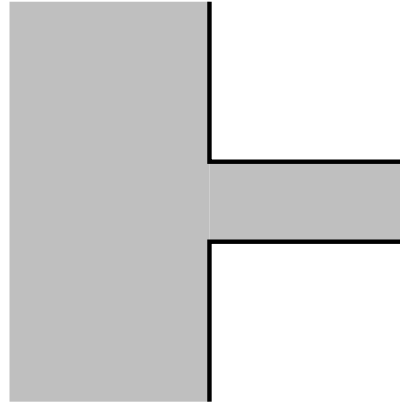


$$u_i^k = \sum_{p=0}^{i-k-1} a_p H_p^{(1)}(\omega r) \cos p\theta$$

Les a_p sont fonctions des termes d'**ordre inférieur**

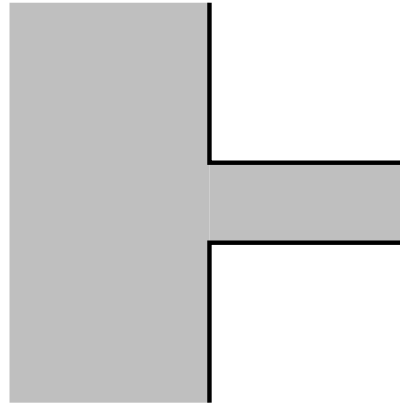
Les champs proches d'ordre $i > 1$

- Les $(u_p)_i^k(X, Y)$ sont définis sur le domaine **canonique**:



Les champs proches d'ordre $i > 1$

- Les $(u_p)_i^k(X, Y)$ sont définis sur le domaine **canonique**:



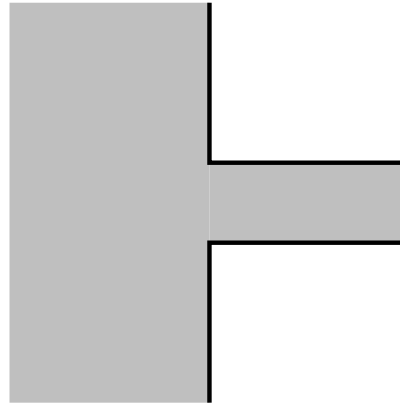
- par des équations de **Laplace**:

$$\Delta(u_p)_i^k = 0, \quad (i = k \text{ ou } k + 1),$$

$$\Delta(u_p)_i^k = -\omega^2 (u_p)_{i-2}^k, \quad (i \geq k + 2),$$

Les champs proches d'ordre $i > 1$

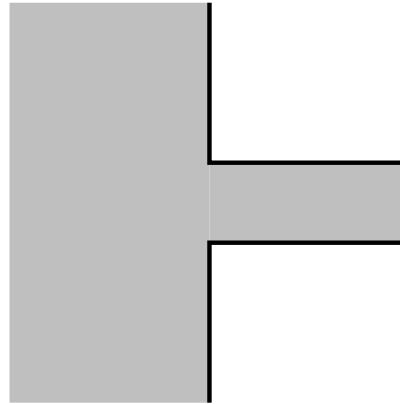
- Les $(u_p)_i^k(X, Y)$ sont définis sur le domaine **canonique**:



- par des équations de **Laplace**:
- par des **croissances** polynomiales à l'infini:
 - Les **croissances** dans le demi-espace sont fonctions des champs **lointains d'ordre inférieur ou égal**
 - Les **croissances** dans la fente sont fonctions des champs de **fente d'ordre inférieur**

Les champs proches d'ordre $i > 1$

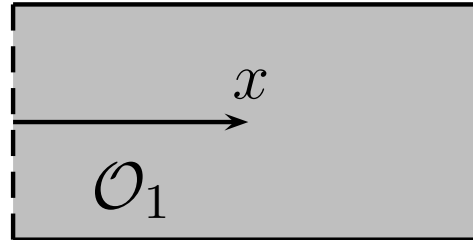
- Les $(u_p)_i^k(X, Y)$ sont définis sur le domaine **canonique**:



- Preuve de l'**existence-unicité**:
 - Avec des fonctions de troncature, on retire le comportement croissant à l'infini des $(u_p)_i^k$
 - On utilise la **théorie variationnelle** “classique” (espace de Sobolev à poids, Leroux, Hardy,...)

Les champs de fente d'ordre $i > 1$

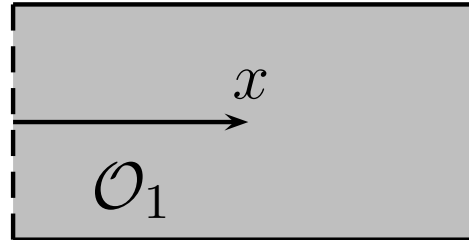
- Les U_i^k sont définis sur le domaine **canonique**:



- $$U_i^k(x) = \int_0^1 (u_p)_i^k(0, Y) dY \exp i\omega x$$

Les champs de fente d'ordre $i > 1$

- Les U_i^k sont définis sur le domaine **canonique**:



- Les U_i^k ne dépendent que de x .
- $U_i^k(x) = \int_0^1 (u_p)_i^k(0, Y) dY \exp i\omega x$

Quelques propriétés

On observe que:

● Plus $i - k$ est grand plus u_i^k est **singulier** à l'origine:

Termes en r^{-p} , $p = 0, \dots, i - k - 1$

Quelques propriétés

On observe que:

- Plus $i - k$ est grand plus u_i^k est **singulier** à l'origine:

Termes en r^{-p} , $p = 0, \dots, i - k - 1$

- Plus $i - k$ est grand plus $(u_p)_i^k$ est **croissant**:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Termes en } \rho^p, \quad p = 0, \dots, i - k, \\ \text{Termes en } X^p, \quad p = 0, \dots, i - k, \end{array} \right.$

Quelques propriétés

On observe que:

- Plus $i - k$ est grand plus u_i^k est **singulier** à l'origine:

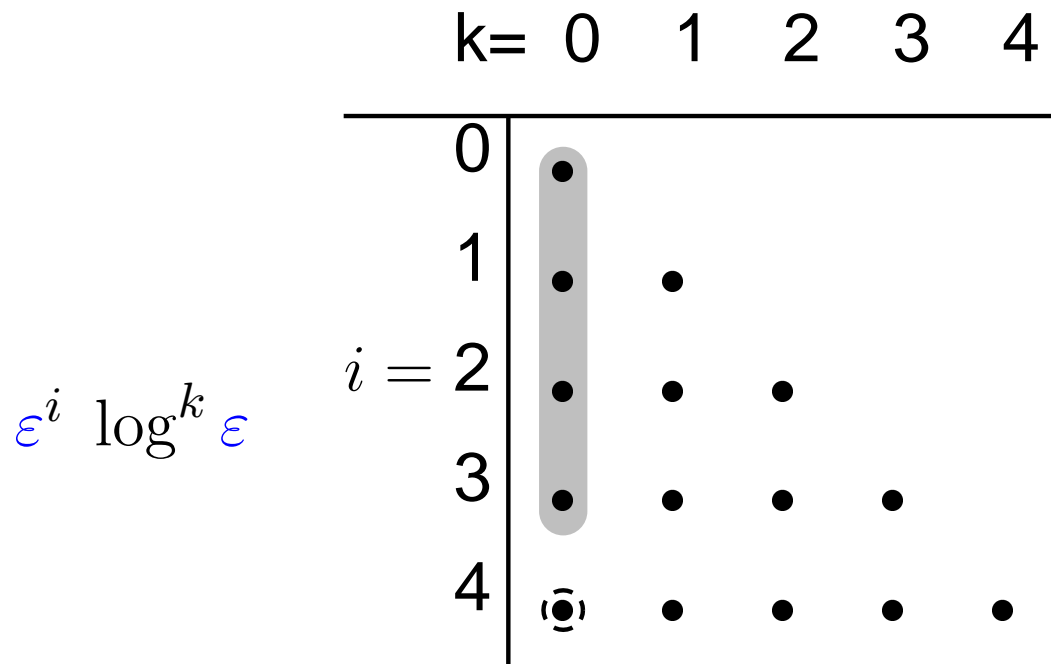
Termes en r^{-p} , $p = 0, \dots, i - k - 1$

- Plus $i - k$ est grand plus $(u_p)_i^k$ est **croissant**:

$$\begin{cases} \text{Termes en } \rho^p, & p = 0, \dots, i - k, \\ \text{Termes en } X^p, & p = 0, \dots, i - k, \end{cases}$$

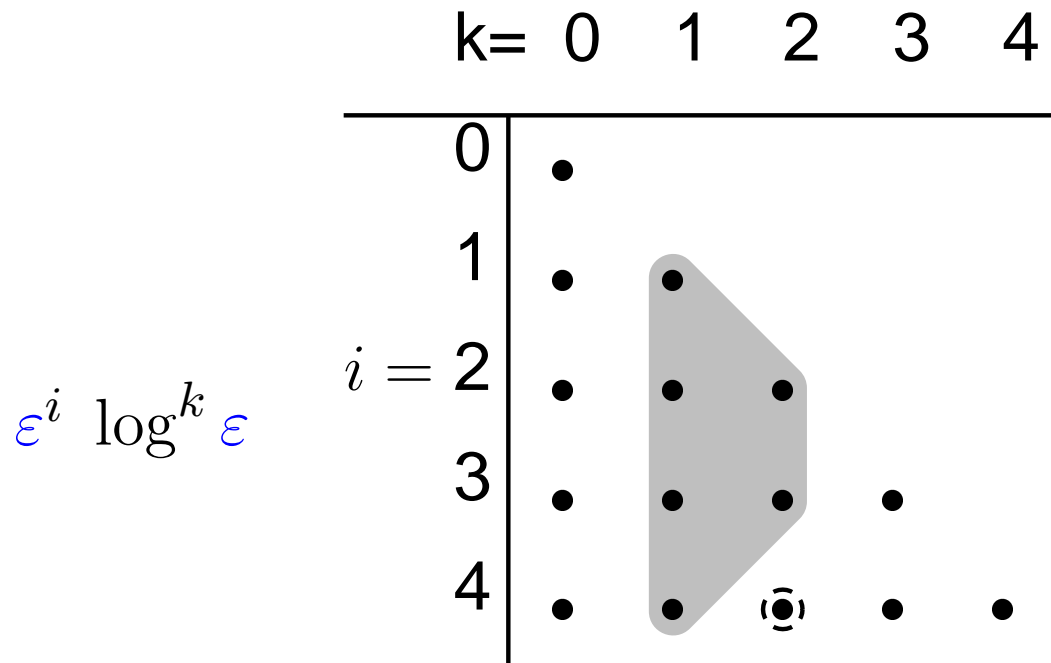
- Lorsque l'**ordre** i augmente, on a $O(\frac{i^2}{2})$ ($\times 3$) termes à calculer...

Diagramme de dépendance des correcteurs



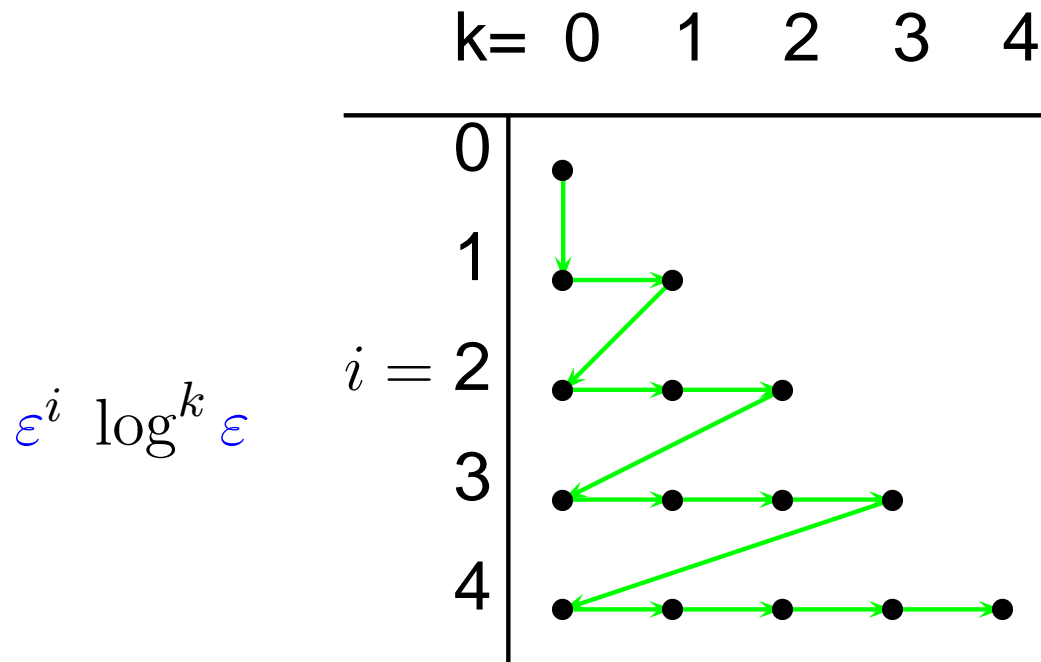
Chaque point correspond au triplet $(u_i^k, (u_p)_i^k, U_i^k)$.

Diagramme de dépendance des correcteurs



Chaque point correspond au triplet $(u_i^k, (u_p)_i^k, U_i^k)$.

Ordonnancement naturel des calculs



Chaque point correspond au triplet $(u_i^k, (u_p)_i^k, U_i^k)$.

Dérivation des termes des dév. asympt.

- On recherche la solution sous la forme:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k \textcolor{red}{u}_i^k \quad (\text{Champ lointain})$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (\textcolor{red}{u}_p)_i^k \quad (\text{Champ proche})$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k \textcolor{red}{U}_i^k \quad (\text{Champ de fente})$$

Dérivation des termes des dév. asympt.

- On recherche la solution sous la forme:

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k \textcolor{red}{u}_i^k \quad (\text{Champ lointain})$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (\textcolor{red}{u}_p)_i^k \quad (\text{Champ proche})$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k \textcolor{red}{U}_i^k \quad (\text{Champ de fente})$$

- On **injecte les équations** volumiques et surfaciques

Dérivation des termes des dév. asympt.

- On recherche la solution sous la forme:

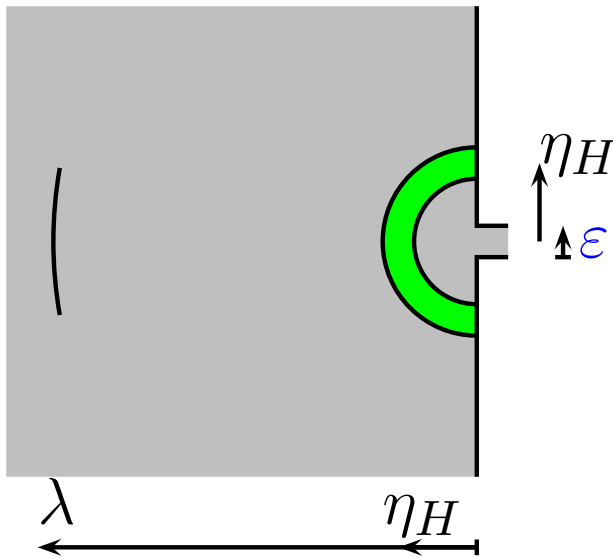
$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k \mathbf{u}_i^k \quad (\text{Champ lointain})$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (\mathbf{u}_p)_i^k \quad (\text{Champ proche})$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k \mathbf{U}_i^k \quad (\text{Champ de fente})$$

- On injecte les équations volumiques et surfaciques
- Obtention des conditions de couplage (la difficulté)

Raccord lointain-proche



Dans une **zone épaisse** du type:

$$\varepsilon \ll \eta_H \ll \lambda.$$

On traduit le raccord:

$$u^\varepsilon(\eta_H, \theta) = (u_p)^\varepsilon\left(\frac{\eta_H}{\varepsilon}, \theta\right).$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k(\eta_H, \theta) \simeq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k\left(\frac{\eta_H}{\varepsilon}, \theta\right)$$

$\eta_H \rightarrow 0$
 $\frac{\eta_H}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$

Raccord lointain-proche

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k \textcolor{red}{u}_i^k(\eta_H, \theta) \simeq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (\textcolor{red}{u}_p)_i^k\left(\frac{\eta_H}{\varepsilon}, \theta\right)$$

$\eta_H \rightarrow 0$ $\frac{\eta_H}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$

On **développe**

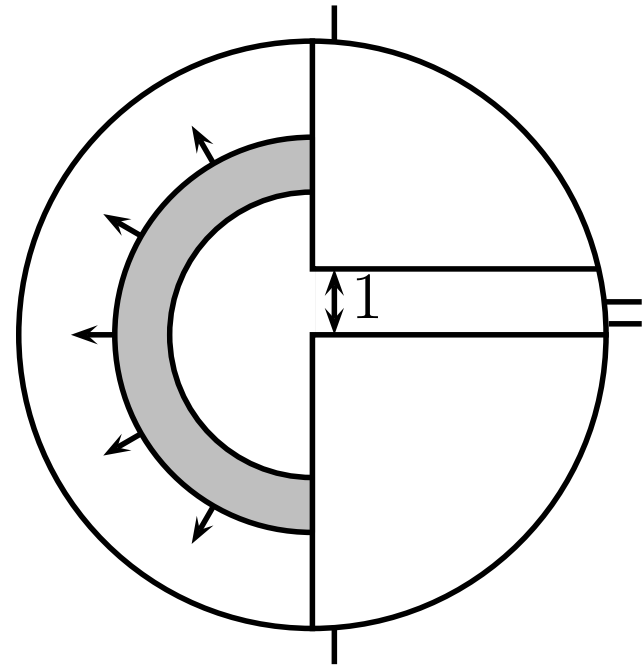
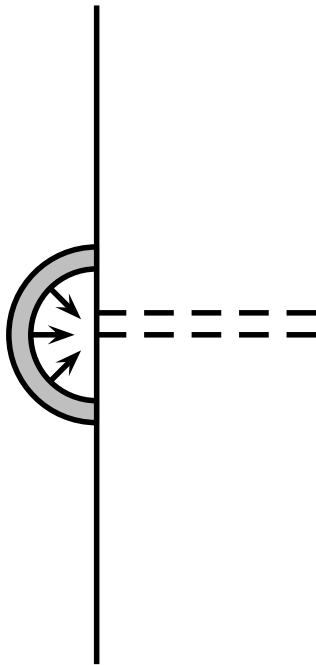
- la série de gauche suivant η_H proche de **0**
- la série de droite suivant η_H/ε proche de l'**infini**

On **identifie** terme à terme les deux séries.

Le couplage entre les champs

- Le couplage champ **lointain**-champ **proche**:

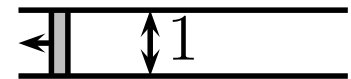
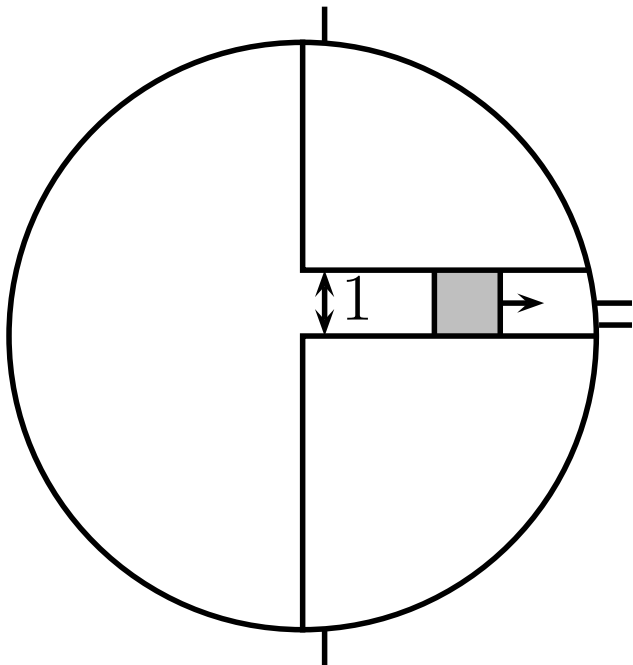
Le comportement **singulier** du champ lointain en l'origine est couplé avec le comportement **croissant** du champ **proche** à l'infini dans le demi-espace



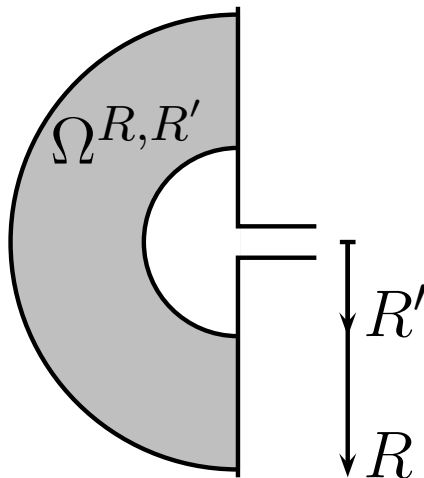
Le couplage entre les champs

- Le couplage champ lointain-champ proche:
- Le couplage champ proche-champ de fente

Le comportement croissant du champ proche dans la fente est couplé avec le comportement à l'origine du champ de fente (valeurs des dérivées)

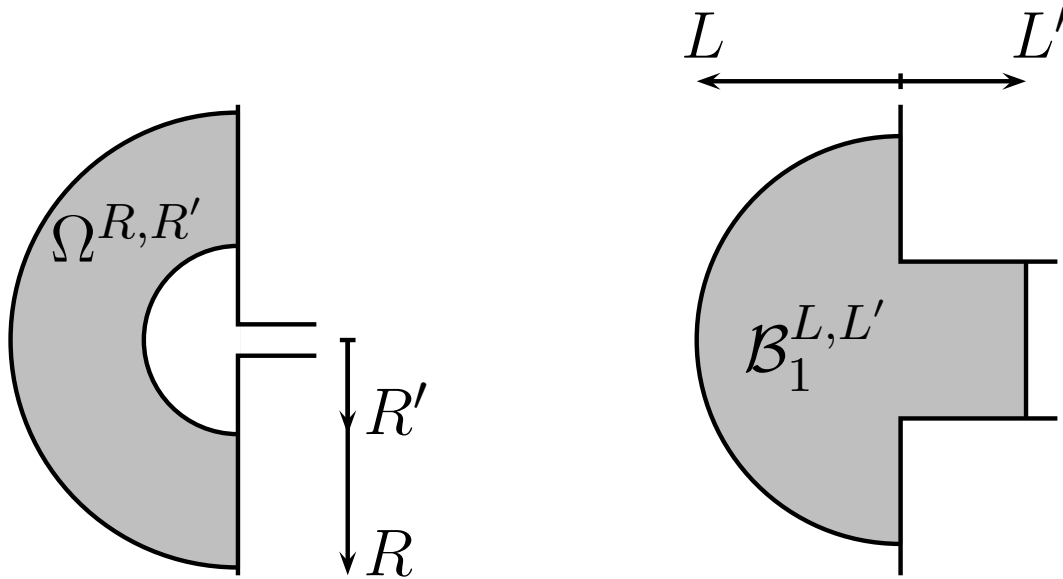


Analyse mathématique



$$\left\| u^\varepsilon - u^0 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^n \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

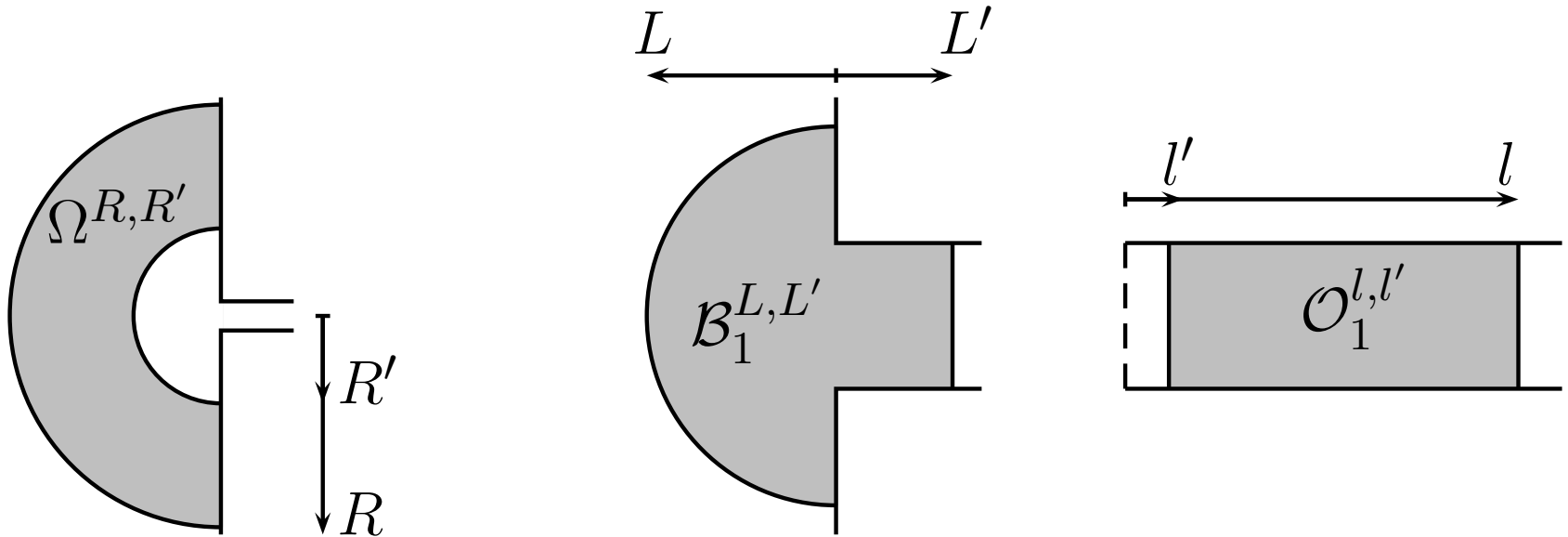
Analyse mathématique



$$\left\| u^\varepsilon - u^0 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^n \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\left\| u_p^\varepsilon - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{B}_1^{L,L'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^{n+1} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Analyse mathématique



$$\left\| \mathbf{u}^\varepsilon - \mathbf{u}^0 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k \mathbf{u}_i^k \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^n \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\left\| \mathbf{u}_p^\varepsilon - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (\mathbf{u}_p)_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{B}_1^{L,L'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^{n+1} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

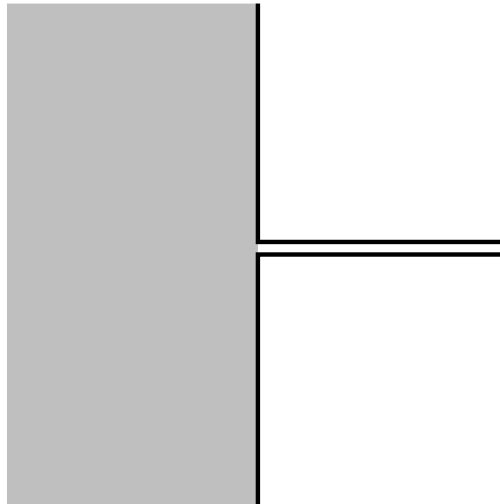
$$\left\| \mathbf{U}^\varepsilon - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k \mathbf{U}_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{O}_1^{l,l'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^{n+1} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Idée de la preuve

Nous souhaitons définir une **approximation** \tilde{u}_n^ε de la solution exacte qui **coïncide** avec:

- le développement **tronqué** du **champ lointain** loin de la fente dans le demi-espace

$$u_n^{H,\varepsilon}(x,y) = u^0(x,y) + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k(x,y)$$

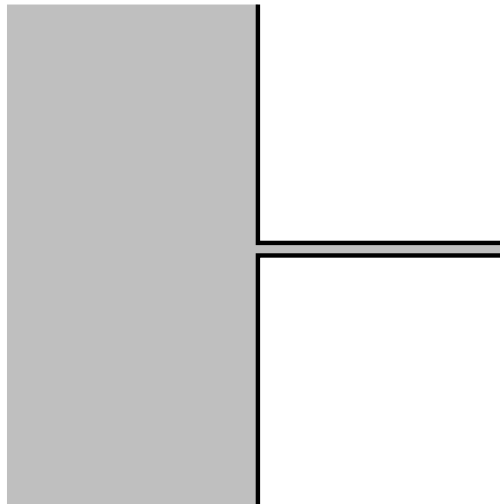


Idée de la preuve

Nous souhaitons définir une **approximation** \tilde{u}_n^ε de la solution exacte qui **coïncide** avec:

- le développement **tronqué** en **champ proche** au voisinage de l'embouchure de la fente

$$u_n^{N,\varepsilon}(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k \left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right)$$

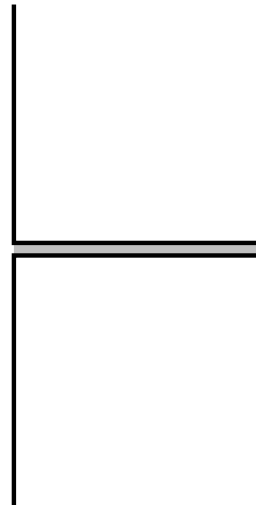


Idée de la preuve

Nous souhaitons définir une **approximation** \tilde{u}_n^ε de la solution exacte qui **coïncide** avec:

- le développement **tronqué** en **champ de fente** loin dans la fente

$$u_n^{S,\varepsilon}(x,y) = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k U_i^k(x, \frac{y}{\varepsilon})$$



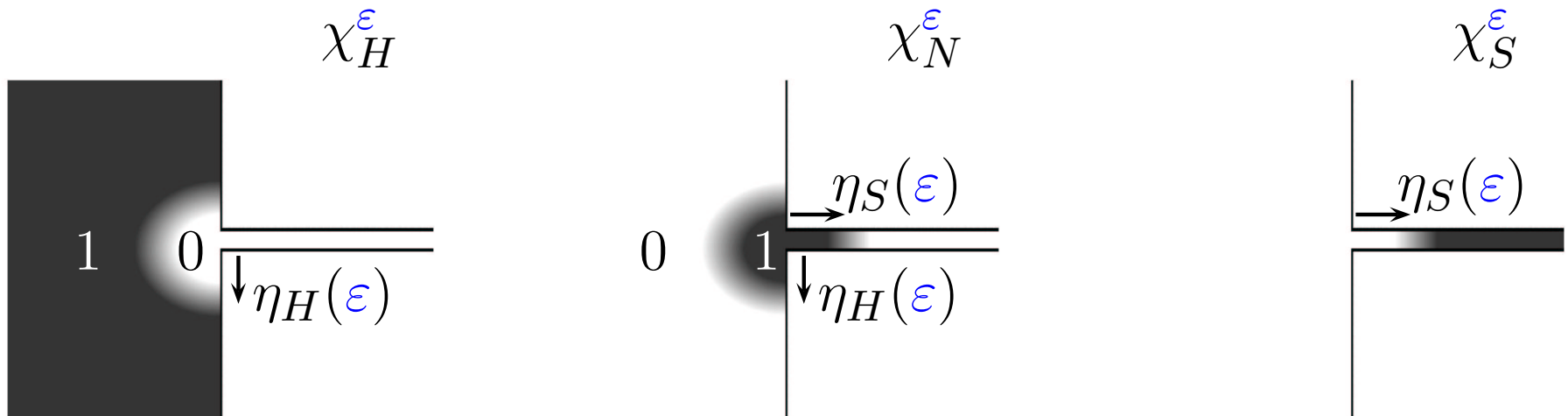
Idée de la preuve

Introduction d'une partition de l'unité

$$\tilde{u}_n^\varepsilon(r, \theta) = \chi_H^\varepsilon u_n^{H,\varepsilon} + \chi_N^\varepsilon u_n^{N,\varepsilon} + \chi_S^\varepsilon u_n^{S,\varepsilon}$$

avec

$$\chi_H^\varepsilon + \chi_N^\varepsilon + \chi_S^\varepsilon = 1.$$

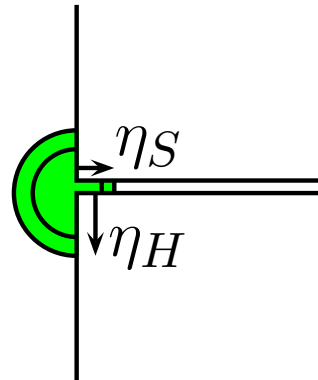


Idée de la preuve

Equation portant sur l'**erreur** $e_n^\varepsilon = \tilde{u}_n^\varepsilon - u^\varepsilon$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta e_n^\varepsilon + \omega^2 e_n^\varepsilon = (\delta_N)_n^\varepsilon + (\delta_{H-N})_n^\varepsilon + (\delta_{S-N})_n^\varepsilon, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial e_n^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ e_n^\varepsilon \text{ est sortante.} \end{array} \right.$$

$(\delta_N)_n^\varepsilon$ est relié à l'**approximation** de l'équation de **Helmholtz** par le champ **proche**

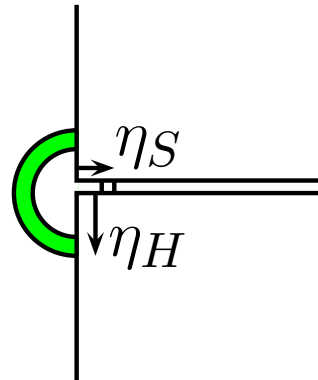


Idée de la preuve

Equation portant sur l'**erreur** $e_n^\varepsilon = \tilde{u}_n^\varepsilon - u^\varepsilon$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta e_n^\varepsilon + \omega^2 e_n^\varepsilon = (\delta_N)_n^\varepsilon + (\delta_{H-N})_n^\varepsilon + (\delta_{S-N})_n^\varepsilon, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial e_n^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ e_n^\varepsilon \text{ est sortante.} \end{array} \right.$$

$(\delta_{H-N})_n^\varepsilon$ est relié à l'**erreur de raccord** entre champ **lointain** et champ **proche**

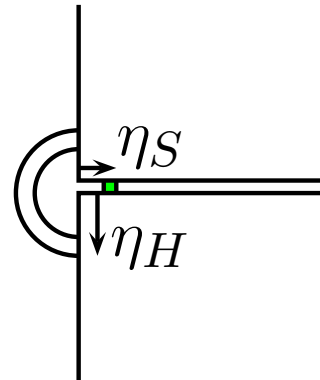


Idée de la preuve

Equation portant sur l'**erreur** $e_n^\varepsilon = \tilde{u}_n^\varepsilon - u^\varepsilon$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta e_n^\varepsilon + \omega^2 e_n^\varepsilon = (\delta_N)_n^\varepsilon + (\delta_{H-N})_n^\varepsilon + (\delta_{S-N})_n^\varepsilon, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial e_n^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ e_n^\varepsilon \text{ est sortante.} \end{array} \right.$$

$(\delta_{S-N})_n^\varepsilon$ est relié à l'**erreur de raccord** entre champ de **fente** et champ **proche**



Idée de la preuve

Equation portant sur l'**erreur** $e_n^\varepsilon = \tilde{u}_n^\varepsilon - u^\varepsilon$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta e_n^\varepsilon + \omega^2 e_n^\varepsilon = (\delta_N)_n^\varepsilon + (\delta_{H-N})_n^\varepsilon + (\delta_{S-N})_n^\varepsilon, & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial e_n^\varepsilon}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega_\varepsilon, \\ e_n^\varepsilon \text{ est sortante.} \end{array} \right.$$

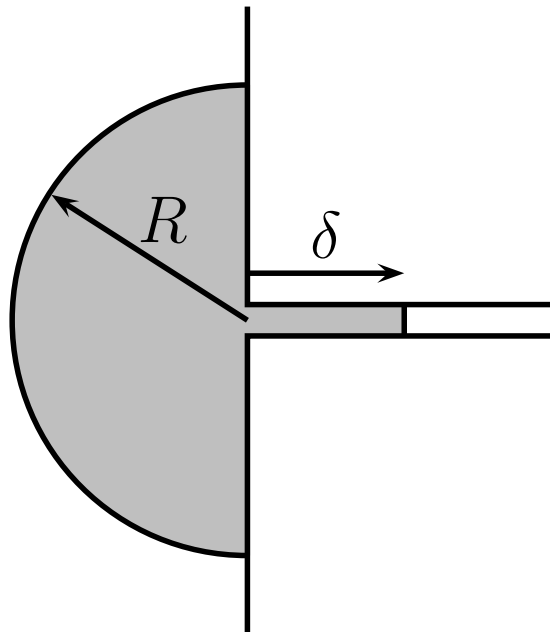
Démarche asymptotique classique:

- **Stabilité**: raisonnement par l'**absurde** (Helmholtz)
- **Consistance**: plus spécifique et technique (étude des singularités et croissances par séparation de variables)

Idée de la preuve

L'estimation d'erreur globale

$$\left\{ \begin{aligned} \|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} &\leq C \left[\left(\eta_H(\varepsilon) \right)^n + \left(\frac{\varepsilon}{\eta_H(\varepsilon)} \right)^n \right] \\ &\quad + C \left[\left(\eta_S(\varepsilon) \right)^n + \left(\frac{\varepsilon}{\eta_S(\varepsilon)} \right)^n \right]. \end{aligned} \right.$$



Idée de la preuve

L'estimation d'erreur globale

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \left[\left(\eta_H(\varepsilon) \right)^n + \left(\frac{\varepsilon}{\eta_H(\varepsilon)} \right)^n \right] \\ \quad + C \left[\left(\eta_S(\varepsilon) \right)^n + \left(\frac{\varepsilon}{\eta_S(\varepsilon)} \right)^n \right]. \end{array} \right.$$

On choisit $\eta_H(\varepsilon)$ et $\eta_S(\varepsilon)$ pour **optimiser** cette relation

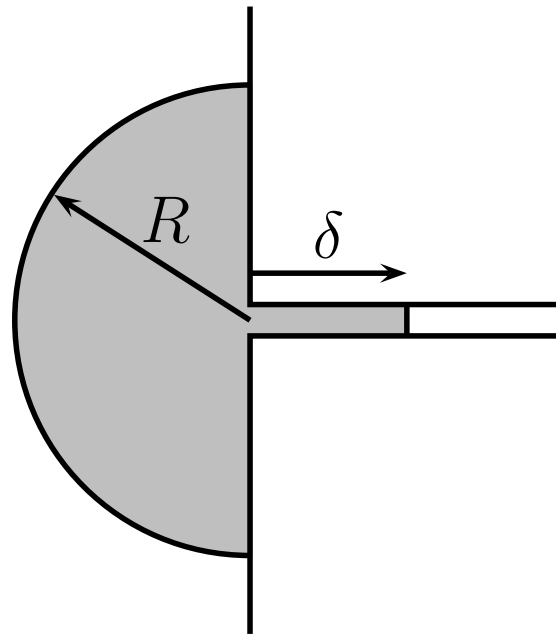
$$\eta_H(\varepsilon) = \eta_S(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$$

Nous tirons

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

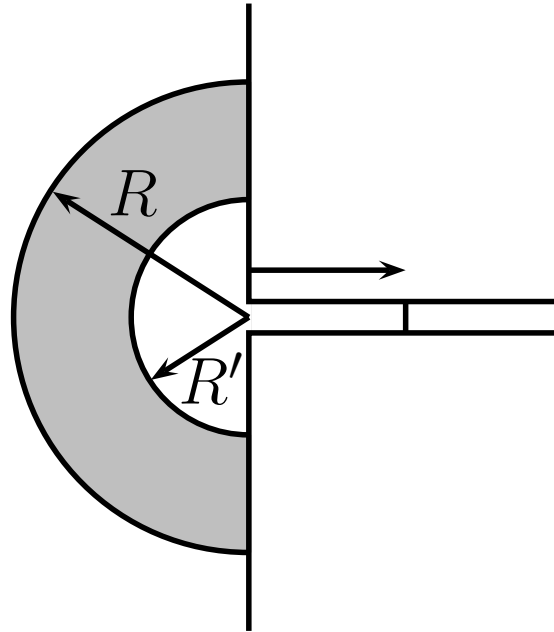
Idée de la preuve

$$\left\| u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$



Idée de la preuve

$$\left\| u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}} \quad \implies \quad \left\| u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$



Idée de la preuve

$$\left\| u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}} \implies \left\| u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

Dans la zone de **champ lointain**:

$$\tilde{u}_n^\varepsilon = u_n^{H,\varepsilon} = u^0 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k$$

Idée de la preuve

$$\left\| u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}} \quad \Longrightarrow \quad \left\| u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

Dans la zone de **champ lointain**:

$$\tilde{u}_n^\varepsilon = u_n^{H,\varepsilon} = u^0 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k$$

$$\begin{cases} \left\| u^\varepsilon - u_{3n}^{H,\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{\frac{3n}{2}} \\ \left\| u_{3n}^{H,\varepsilon} - u_n^{H,\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{n+1} \log^n \varepsilon \end{cases}$$

Idée de la preuve

$$\left\| u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon^{R,\delta})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}} \implies \left\| u^\varepsilon - \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{\frac{n}{2}}$$

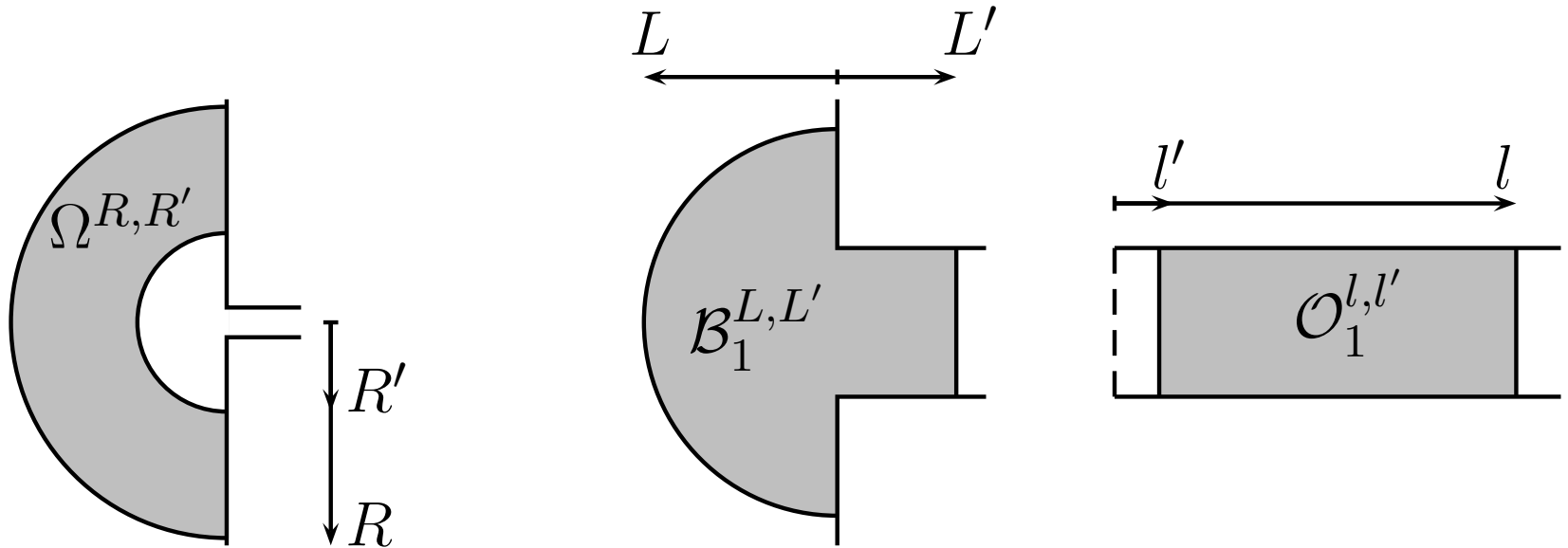
Dans la zone de **champ lointain**:

$$\tilde{u}_n^\varepsilon = u_n^{H,\varepsilon} = u^0 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k$$

$$\begin{cases} \left\| u^\varepsilon - u_{3n}^{H,\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{\frac{3n}{2}} \\ \left\| u_{3n}^{H,\varepsilon} - u_n^{H,\varepsilon} \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{n+1} \log^n \varepsilon \end{cases}$$

On conclut par **inégalité triangulaire**.

Analyse mathématique



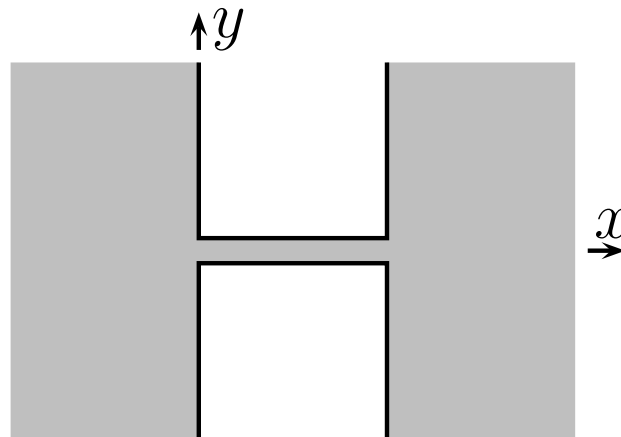
$$\left\| u^\varepsilon - u^0 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{i-1} \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k u_i^k \right\|_{H^1(\Omega^{R,R'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^n \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\left\| u_p^\varepsilon - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k (u_p)_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{B}_1^{L,L'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^{n+1} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

$$\left\| U^\varepsilon - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \varepsilon^i (\log \varepsilon)^k U_i^k \right\|_{H^1(\mathcal{O}_1^{l,l'})} \leq C \varepsilon^{n+1} (\log \varepsilon)^{n+1} \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Perspectives

1. Analyse mathématique des fentes finies (phénomènes de **résonance**)



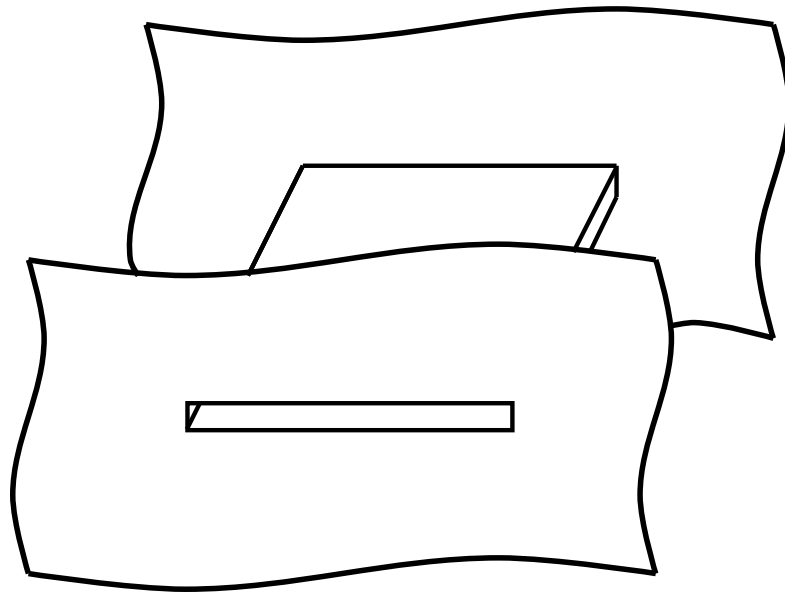
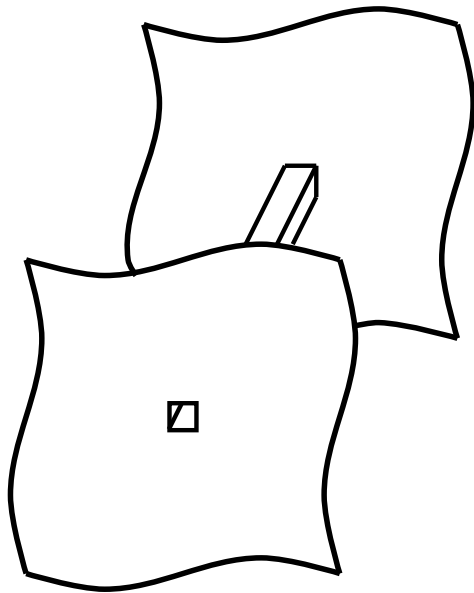
La difficulté: le résultat de **stabilité**.

Perspectives

1. Analyse mathématique des fentes finies (phénomènes de **résonance**)
2. Comparaison avec les techniques **multi-échelles**

Perspectives

1. Analyse mathématique des fentes finies (phénomènes de **résonance**)
2. Comparaison avec les techniques **multi-échelles**
3. Equations de **Maxwell** 3D



Perspectives

1. Analyse mathématique des fentes finies (phénomènes de **résonance**)
2. Comparaison avec les techniques **multi-échelles**
3. Equations de **Maxwell** 3D
4. Domaine **temporel** (équation d'évolution)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0.$$